ΣΠΟΥΔΗ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

e-spoudi

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1

5/12/2020

ΘΕΜΑ Α

A_1) Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και κατόπιν να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

A_2) Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

A_3) Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

A_4) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x)=e^{|x|}$ **β)** $f(x)=-\eta\mu x,\ x\in[0,\pi]$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

A_5) Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x-1)$ είναι καλά ορισμένο.

β) Αν ισχύουν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$, τότε σε κάθε περίπτωση είναι

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x).g(x)\right)=0$$

γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και οι αριθμοί 0, 3 είναι διαδοχικές ρίζες της, τότε η εξίσωση $f(1)x^2-x-f(2)=0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες.

δ) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=e^{\sqrt{x}}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της .

ΣΠΟΥΔΗ

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$f(x) = e^{x^2} + x^2 \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{\ln x}$$

B_1) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $\frac{f}{g}$ και fog

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

B_2) Αν ισχύει:

$$f'(1)\lambda^2 + g'(e) = \frac{1}{2e} + 8e + 8$$

τότε να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

B_3) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται και κατόπιν να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση g^{-1}

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

B_4) Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - e^{x^2} + \mu x + 1}{(x-1)^2}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = e^{1-x} - \ln x + 1, \; x > 0$$

$Γ_1$) Να αποδείξετε ότι f αντιστρέφεται και κατόπιν να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

$Γ_2$) Να αποδείξετε ότι η f έχει μία ακριβώς ρίζα ρ με $\rho > 1$ Στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση:

$e > e^x (\ln x + 1)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

$Γ_3$) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

ΣΠΟΥΔΗ

$$f'(x)+f''(x)+\frac{\eta\mu x}{x^2}=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Γ$_4$) Σημείο Μ κινείται στη γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης με τύπο $g(x)=e^x, x\in\mathbb{R}$ και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $2\frac{m}{s}$. Αν Α είναι η προβολή του Μ στον άξονα $x'x$, τότε να βρείτε το σημείο Μ στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τετραγώνου πλευράς ΜΑ είναι $4e^4\ \frac{m^2}{s}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:[0,6]\to\mathbb{R}$ και η συνεχής συνάρτηση $g:[0,6]\to\mathbb{R}$,για τις οποίες ισχύουν :

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,6)$, έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[0,8]$ και η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,6)$
- $g(x)g(6-x)\geq g^2(x)+xf(6-x)$ για κάθε $x\in[0,6]$
- Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,6)$ για το οποίο ισχύει $g(0)<g(x_0)$

Να αποδείξετε ότι:

Δ$_1$) Ισχύει $g(0)=g(6)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Δ$_2$) Η εξίσωση:

$$f(x)(2f'(x)+1)+(x-6)f'(x)-\frac{32}{3}=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,6)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Δ$_3$) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,6)$ με $g''(\xi)<0$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Δ$_4$) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(0,6)$ τέτοια ώστε να είναι:

$$\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{4}{f'(\xi_2)}+\frac{3}{f'(\xi_3)}=6$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΣΤΟΥΔΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ - ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2

5/12/2020

ΣΠΟΥΔΗ

ΘΕΜΑ Α

A_1) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού D_f και D_g αντίστοιχα, τότε να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$ και $\frac{f}{g}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

A_2) Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

A_3) Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

A_4) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x)=e^{|x|}$ **β)** $f(x)=-\eta\mu x,\ x\in[0,\pi]$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

A_5) Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x-1)$ είναι καλά ορισμένο.

β) Αν ισχύουν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, τότε σε κάθε περίπτωση είναι

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x).g(x)\right)=0$

γ) Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση αντιστρέφεται.

δ) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=e^{\sqrt{x}}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της .

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=x^{\eta\mu x}, x>0$

B_1) Να λύσετε την εξίσωση $2f'(x)-f''(x)-3=0$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

B_2) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

B_3) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2f(x)-2x^3-2}{\sqrt{x+3}-2}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

B_4) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο $x_0=\frac{\pi}{2}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$f(x)=e^{x^2}+x^2 \quad \text{και} \quad g(x)=\sqrt{\ln x}$$

$Γ_1$) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $\frac{f}{g}$ και fog

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

$Γ_2$) Αν ισχύει:

ΣΠΟΥΔΗ

$$f'(1)\lambda^2 + g'(e) = \frac{1}{2e} + 8e + 8$$

τότε να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Γ$_3$) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται και κατόπιν να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση g^{-1}

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Γ$_4$) Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - e^{x^2} + \mu x + 1}{(x-1)^2}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = e^{1-x} - \ln x + 1,\ x > 0$$

Δ$_1$) Να αποδείξετε ότι f αντιστρέφεται . Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Δ$_2$) Να λύσετε την ανίσωση $e > e^x(\ln x + 1)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Δ$_3$) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1-3h) + f(1+2h) - 4 + \eta\mu(7h)}{h}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Δ$_4$) Σημείο Μ κινείται στη γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης με τύπο $g(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$ και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $2\frac{m}{s}$. Αν Α είναι η προβολή του Μ στον άξονα $x'x$, τότε να βρείτε το σημείο Μ στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τετραγώνου πλευράς ΜΑ είναι $4e^4 \frac{m^2}{s}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

ΣΠΟΥΔΗ