ΣΠΟΥΔΗ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

e-spoudi

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

27/3/2021

ΘΕΜΑ Α

A_1) Να διατυπώσετε το κριτήριο της παρεμβολής και το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

A_2) α) Πότε μία συνάρτηση f λέγεται κυρτή σε ένα διάστημα Δ;

β) Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

A_3) Αν $f(x) = \ln|x|, x \in \mathbb{R}^*$, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

A_4) Θεωρήστε τον παρακάτω συλλογισμό:

<< Αν μία συνάρτηση P είναι πολυωνυμική με μεγιστοβάθμιο όρο $\alpha x^2, \alpha > 0$, τότε σε κάθε περίπτωση το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(P(x) \eta\mu \frac{1}{x} \right)$ δεν υπάρχει.>>

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω συλλογισμό με την ένδειξη **(Α)** αν είναι αληθής ή με την ένδειξη **(Ψ)** αν είναι ψευδής.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

β) Να δώσετε παράδειγμα που να τεκμηριώνει την απάντησή σας.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

A_5) Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και το 3 είναι μοναδική ρίζα της , τότε σε κάθε περίπτωση θα είναι $f(2)f(4) < 0$

β) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και το 2 είναι μοναδική ρίζα της f', τότε σε κάθε περίπτωση η f αλλάζει μονοτονία εκατέρωθεν του 2

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ΣΠΟΥΔΗ

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h με τύπους:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right), x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\ln(x-1), x>1$$

$$h(x)=\sqrt{x^{2}+1+\eta\mu x}+x,\ x\in\mathbb{R}$$

B_1) Να ορίσετε τις συναρτήσεις fog και $\frac{f}{g}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

B_2) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

B_3) Για τις διάφορες τιμές τού $\lambda\in\mathbb{R}$ να βρείτε, αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to1^{+}}\left(\left(\lambda x^{2}-1\right)\frac{\ln(x-1)}{(x-1)^{2}}\right)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

B_4) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha+\beta=2$, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$x^{2021}+(\alpha\beta-6)x+f(0)+g(e+1)=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f''(x)=\frac{1}{x^{2}}$, για κάθε $x>0$
- $f'(1)=-1$ και $f(1)=1$

$Γ_1$) Να αποδείξετε ότι $f(x)=1-\ln x,\ x>0$ και κατόπιν για κάθε $x>0$ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

$Γ_2$) Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} τής f και τη συνάρτηση $\frac{f^{-1}}{f}$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο 1 εφάπτεται και της γραφικής παράστασης της f^{-1}

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

$Γ_3$) Αν για τη δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει:

$$h''(x)=\left(f^{-1}(x)\right)^{3}-2\left(f^{-1}(x)\right)^{2}+\mu^{2}f^{-1}(x),\ x\in\mathbb{R},\ \mu^{2}>1$$

ΣΠΟΥΔΗ

τότε να αποδείξετε ότι η h έχει το πολύ δύο ρίζες.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Γ$_4$) Ορίζουμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x)=\begin{cases} -f(x), & x>\alpha \\ f^{-1}(x), & x\le\alpha \end{cases}$ όπου α θετικός πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός α ώστε η g να είναι συνεχής σε αυτόν.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(-1)=-\ln 2$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(-2)=-1$ για τις οποίες ισχύουν:

- $|x+1-f(x)|=\ln\left(e^{x+1}+1\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $g\left(x^3+x\right)-f(x)+x\ln 2+1\le 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Δ$_1$) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+1-\ln\left(e^{x+1}+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$ και κατόπιν να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε το σύνολο τιμών της $f(A)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Δ$_2$) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται. Με δεδομένο ότι η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f είναι παραγωγίσιμη στο $f(A)$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο $x_0=-\ln 2$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Δ$_3$) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο $x_1=-2$. Κατόπιν να λύσετε την ανίσωση :

$$e^{f(2f'(x)-2)}<\lim_{h\to 0}\frac{g(-2+4h)+1}{h}+\ln 2$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Δ$_4$) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$2f(x)>f(x-\alpha)+f(x+\alpha)$$

όπου α θετικός πραγματικός αριθμός.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ΣΠΟΥΔΗ