ΣΠΟΥΔΗ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

e-spoudi

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

**22/5/2021**

### ΘΕΜΑ Α

**Α1. α)** Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

**β)** Να διατυπώσετε το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών.

**Μονάδες 5**

**Α2.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\begin{cases} 2^{|x|}, & x\le 0 \\ |\ln x|, & x>0 \end{cases}$

**Μονάδες 4**

**Α3.** Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει $f(x)=g(x)+c$

**Μονάδες 7**

**Α4.** Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να επιλέξετε τη σωστή ή τις σωστές απαντήσεις.

**Α.** Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=-\ln x,\ x>0$

**α.** Δεν έχει ασύμπτωτες.

**β.** Έχει όριο $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

**γ.** Έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα $y'y$

**δ.** Έχει ένα κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$

**Β.** Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=|\eta\mu x-x|,\ x>0$

**α.** Είναι γνησίως αύξουσα.

**β.** Έχει κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$

**γ.** Έχει τύπο $f(x)=x-\eta\mu x,\ x>0$

**δ.** Είναι γνησίως φθίνουσα.

**Γ.** Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=2\alpha^{x+1}-1,\ \alpha>1,\ x\in\mathbb{R}$

**α.** Είναι γνησίως φθίνουσα.

**β.** Έχει όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

**γ.** Έχει όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$

**δ.** Έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=-1$

**Μονάδες 9**

ΣΠΟΥΔΗ

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$f(x) = 2e^{x+3} + 3 \text{ και } g(x) = 2\ln(x-1) - 3$$

**Β1.** Να ορίσετε τις συναρτήσεις $fog$ και $f+g$. Κατόπιν να βρείτε τη σχετική θέση της $fog$ με τον άξονα $x'x$.

**Μονάδες 6**

**Β2.** Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση $g^{-1}$.

**Μονάδες 6**

**Β3.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης $(\varepsilon)$ της γραφικής παράστασης της $g^{-1}$ στο $-3$. Κατόπιν να βρείτε το σημείο $x_1$ στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g είναι παράλληλη στην $(\varepsilon)$.

**Μονάδες 6**

**Β4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 3 - x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(e+1, e^2+1)$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f'(x) - g'(x) = \eta\mu x$ , για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = g(0) = 1$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
- $f(2f(x)) - 4f(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $10h(x) \le 3h(0) + 7h(\pi) + (x^2 - \pi x)^2 f(x)$ , για κάθε $x \in \mathbb{R}$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι $f(x) - g(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$ και κατόπιν ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$2x^3 + 2x^2 - f^2(x) = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2,3)$

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Αν η ευθεία με εξίσωση $y = 2x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$ και $f(1) = 3$ , τότε να υπολογίσετε τα όρια:

ΣΠΟΥΔΗ

**α)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)+1+\ln x}{xf(x)-2x^2+\eta\mu(5x)}$ **β)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left|f^3(x)+f(x)-20\right|-\left|f(x)-13\right|}{f(x)-3}$

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,\pi)$, τέτοιο ώστε να είναι $h'(x_0)=0$ . Κατόπιν να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h''$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες.

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)-f(x)=\ln x+1-\dfrac{1}{x},$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- Η γραφική παράσταση της f εφάπτεται στον άξονα $x'x$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{x-1}-\ln x-1,\ x>0$

**Μονάδες 5**

**Δ2. α)** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Κατόπιν να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x)\ge0,$ για κάθε $x>0$.

**Μονάδες 5**

**β)** Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει $\alpha.\beta.\gamma=1$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$e^{\alpha-1}+e^{\beta-1}+e^{\gamma-1}\ge3$$

**Μονάδες 5**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$(x+1)f\left(x^2\right)\le f\left(x^3\right)+xf(x),\ \text{για κάθε } x>0$$

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Σημείο $M(x(t),y(t)),\ x(t)>1$ κινείται στη γραφική παράσταση της f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $1\dfrac{m}{s}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε θέση του Μ ισχύει $x(t)>y(t)$. Αν $c_1,\ c_2$ είναι οι κύκλοι κέντρου Μ και ακτίνας $x(t),\ y(t)$ αντίστοιχα, τότε να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του κυκλικού δακτυλίου που σχηματίζεται από τους $c_1,\ c_2$ ,τη χρονική στιγμή $t_0$ που είναι $x(t_0)=5m$

**Μονάδες 5**

ΣΠΟΥΔΗ