

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ**

**10/4/2021**

**ΘΕΜΑ Α**

**A<sub>1</sub>)** Να διατυπώσετε τα θεωρήματα μέγιστης και ελάχιστης τιμής και το θεώρημα του Fermat .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

**A<sub>2</sub>) α)** Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[α,β]$ ;

**β)** Πότε η ευθεία  $x = x_0$  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ ;

**ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

**A<sub>3</sub>)** Θεωρήστε τον παρακάτω συλλογισμό:

<< Αν η συνάρτηση  $f$  είναι ρητή με συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων  $α, β$  και  $α,β > 0$ , τότε σε

κάθε περίπτωση θα είναι και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( f(x) \cdot \sin \frac{1}{x} \right) = +\infty >>$

**α)** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω συλλογισμό με την ένδειξη **(Α)** αν είναι αληθής, ή με την ένδειξη **(Ψ)** αν είναι ψευδής.

**β)** Να δώσετε παράδειγμα που να τεκμηριώνει την απάντησή σας.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

**A<sub>4</sub>)** Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

**A<sub>5</sub>)** Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σωστό **(Σ)** αν είναι σωστή ή Λάθος **(Λ)** αν είναι λανθασμένη:

**α)** Αν η συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , με σύνολο τιμών το  $f(A)$  αντιστρέφεται, τότε η συνάρτηση  $f \cdot f^{-1}$  έχει πεδίο ορισμού το  $f(A)$ .

**β)** Μία πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού μπορεί να έχει ασύμπτωτες.

γ) Αν η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1, τότε η εξίσωση  $f(x) = y$ , για κάθε  $y$  του συνόλου τιμών της, έχει μία μόνο λύση ως προς  $x$ .

δ) Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης είναι σε κάθε περίπτωση ολικό μέγιστό της.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

### **ΘΕΜΑ Β**

Έστω οι συναρτήσεις  $f, g, h$  με τύπους:

$$f(x) = e^{x-1} + x - 1, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \ln(x+1) + 1, x > -1$$

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sin x + x^2 \eta \mu \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*$$

Β<sub>1</sub>) Να ορίσετε τις συναρτήσεις  $f \circ g$  και  $\frac{f}{g}$

Κατόπιν να βρείτε πότε η γραφική παράσταση της  $g$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα των τετμημένων.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

Β<sub>2</sub>) Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

Β<sub>3</sub>) Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f^3(x) + 3f(x) - 3| - |f(x) - 2|}{f(x) - 1}$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

Β<sub>4</sub>) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(x)}{x^2 + 1} = \frac{2x - (\alpha + \beta)}{(x - \alpha)(x - \beta)}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 7**

### ΘΕΜΑ Γ

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $f:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύουν:

- $f^2(x) + 2f(x)\ln x - x^6 = 36\eta\mu^2 x + 12x^3\eta\mu x - \ln^2 x, x > 0$
- $g(x) + 6\eta\mu x \leq f(x), x > 0$
- $f(1) > 0$  και  $g(1) = 1$

Γ<sub>1</sub>) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = -\ln x + x^3 + 6\eta\mu x, x > 0$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Γ<sub>2</sub>) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Γ<sub>3</sub>) Να αποδείξετε ότι η  $f'$  έχει μία ακριβώς ρίζα  $\rho$ . Στη συνέχεια να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι  $\rho < 1$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Γ<sub>4</sub>) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $g$  στο  $x_0 = 1$ , εφάπτεται και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $h$  με τύπο  $h(x) = x^2 - 2x + 3$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

### ΘΕΜΑ Δ

Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύουν:

- $f(0) = 1$  και  $f(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $f'(x) = f(x) \frac{2x^3}{x^2 + 1}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Δ<sub>1</sub>) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Δ<sub>2</sub>) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Στη συνέχεια να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  αν γνωρίζετε ότι ισχύει:

$$f(2\alpha + \beta - 3) + f(\alpha - \beta) = 2$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

**Δ<sub>3</sub>**) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 2$  έχει δύο ακριβώς ρίζες στο διάστημα  $(-2,2)$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

**Δ<sub>4</sub>**) Σημείο  $M(x, f(x)), x \geq 0$  κινείται στη γραφική παράσταση της  $f$  και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό  $1 \frac{m}{s}$ . Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση  $\Pi(0, 20)$  και παρατηρεί την κίνηση του  $M$ . Αν  $A$  είναι η προβολή του  $M$  στον άξονα  $x'x$ , τότε να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τετραπλεύρου ΜΑΟΠ τη χρονική στιγμή  $t_0$  που είναι  $x(t_0) = 1$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 7**

ΣΠΟΚΛΔΗ