ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

15/5/2021

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω δύο μεταβλητά μεγέθη x, y τα οποία συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όπου f είναι συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0. Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_0;

Μονάδες 4

Α2. Ποια συνάρτηση ονομάζεται αντίστροφη της συνάρτησης $f: A \to \mathbb{R}$;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε και κατόπιν να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 8

Α4. Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να επιλέξετε τη σωστή ή τις σωστές απαντήσεις.

Α. Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$

α. Δεν έχει ασύμπτωτες.

β. Έχει όριο $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

γ. Έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$

δ. Έχει ένα κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$

Β. Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = |\eta\mu x - x|,\ x < 0$

α. Είναι γνησίως αύξουσα.

β. Έχει κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$

γ. Έχει τύπο $f(x) = \eta\mu x - x,\ x < 0$

δ. Είναι γνησίως φθίνουσα.

Γ. Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2\alpha^{x-1} + 1,\ 0 < \alpha < 1,\ x \in \mathbb{R}$

α. Είναι γνησίως φθίνουσα.

β. Έχει όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

γ. Έχει όριο $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

δ. Έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 1$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι συναρτήσεις f, g με τύπους:

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{e^{2x} - 1},\ x > 0 \text{ και } g(x) = \ln(x+1),\ x > -1$$

Β1. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ g$

Μονάδες 6

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 6

Β3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και κατόπιν να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης.

Μονάδες 6

Β4. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)\left(e^{2x}-1\right)-\lambda x}{|x-1|}$$

Μονάδες 7

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Έστω η συνεχής συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} -e^{x}+x+\alpha, & x\le 0 \\ \dfrac{\eta\mu(2x)+x^2-x}{x}, & x>0 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$. Κατόπιν να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$f(x)>-\frac{4}{3}x^2+x+1,\ \text{για κάθε } x>0$$

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς μ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{e}{e-1}\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-\left(-e^{-1}+1\right)}{h}\mu^2-\frac{\pi}{\pi+2}\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi-2h)-(\pi-1)}{h}\mu=0$$

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f με τετμημένη $x_1<0$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{3}{2}\right)$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f^2(x)=x^2\left(2f(x)+1\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,
- $f(1)>1$ και $f(-1)<1$
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(1+3h)-g\left(f(1)-\sqrt{2}\right)}{h}=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}+6$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία. Κατόπιν να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$, με $\alpha<x_1<x_2<x_3<\beta$, υπάρχει μοναδικό $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να είναι:

$$f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)=3f(x_0)$$

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

Μονάδες 5

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $4x^4+2x^3\sqrt{4x^2+1}=1+\sqrt{x^2+1}$

Μονάδες 5

Δ5. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στο $x_0=1$ είναι παράλληλες.

Μονάδες 5