

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

17/4/2021

ΘΕΜΑ Α

A₁) Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle. Ποια η γεωμετρική του ερμηνεία;

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

A₂) Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $fo g$ και $f+g$

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

A₃) Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

A₄) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \begin{cases} -e^x, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

A₅) Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σωστό (**Σ**) ή Λάθος (**Λ**) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, με σύνολο τιμών το $f(A)$ αντιστρέφεται, τότε η συνάρτηση $\frac{f^{-1}}{f}$ έχει πεδίο ορισμού το $f(A)$.

β) Αν η συνάρτηση $f : (0,3) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και δεν έχει ρίζα, τότε είναι $f(1)f(2) < 0$

γ) Ισχύει η ισοδυναμία $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = l$

δ) Για κάθε $x > 0$ ισχύει $\eta \mu x - x > 0$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους:

$$f(x) = e^{x-1} + x - 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{f(x) - e^{x-1} + \lambda x}{|x-1|}, \quad x \neq 1, \lambda \in \mathbb{R}$$

B₁) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1}

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

B₂) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

B₃) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο 1. Κατόπιν να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$f(x) \geq 2x - 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

B₄) Να λύσετε στο \mathbb{R} την ανίσωση:

$$e^{x^2} + x^2 > e^{x+2} + x + 2$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f'(x) = f(x) - 3e^{-2x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 2$
- $g(x) = f(x) + x^2 + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ₁) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{-2x} + e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια να βρείτε τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των f και g .

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Γ₂) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Γ₃) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\gamma_1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x - 2}{x^3 - x^2}$$

$$\gamma_2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{f(x)}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Γ₄) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύουν:

$$\delta_1) f(x_1)f(-x_2) > f(-x_1)f(x_2)$$

$$\delta_2) 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < f(x_1) + f(x_2)$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με σύνολο τιμών το \mathbb{R} και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f^7(x) + 3f(x) = x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $g^3(x) + g(x) = x - 6f'(2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(6) = f(0) + 2$

Δ₁) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Δ₂) Να μελετήσετε την g ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 2$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Δ₃) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, 6)$, τέτοια ώστε να είναι:

$$f'(x_1) + 2f'(x_2) = 1$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Δ₄) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και κατόπιν να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} . Ορίζουμε τη συνάρτηση h με τύπο:

$$h(x) = \frac{f^{-1}(x)}{x^6 + \eta\mu x}, \quad x > 1$$

Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_h της h στο $+\infty$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Δ₅) Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 2$ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$f'(\alpha)(\alpha - 2) + 2f'(\alpha + 2) < f'(\alpha + 2) < \frac{\alpha - 2}{3} + 2f'(\alpha)$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5