

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

24/4/2021

ΘΕΜΑ Α

A₁) Να διατυπώσετε το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών και το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

A₂) α) Ποια συνάρτηση ονομάζεται πρώτη παράγωγος ή παράγωγος της συνάρτησης f ;

β) Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

A₃) Αν $f(x) = \varepsilon\phi x$, $D_f = \mathbb{R} - \{x / \sigma\upsilon\nu x = 0\}$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, x \in D_f$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

A₄) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & -\pi \leq x \leq 0 \\ -\sigma\upsilon\nu x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

A₅) Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και έχει διαδοχικές ρίζες το 0 και το 3, τότε σε κάθε

περίπτωση θα είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{f(1)}{f(2)} \left(\eta\mu \frac{1}{x} - x \right) \right) = -\infty$

β) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + x^2$, $x > 0$ δεν έχει κρίσιμα σημεία στο $(0, +\infty)$

γ) Ένα εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ , στο οποίο η συνάρτηση f δεν παραγωγίζεται, σε κάθε περίπτωση δεν είναι ακρότατο της f

δ) Αν μία συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, τότε δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

ε) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$f(x) = \frac{x^2 + \eta\mu x}{x-1}, x \neq 1 \text{ και } g(x) = 2e^{x-1} + 1, x \in \mathbb{R}$$

B₁) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

B₂) Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση. Στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της αντίστροφης συνάρτησης στο 2

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

B₃) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - 2e^{x-1} + \lambda x - 5}{|x - 2|}$$

Στη συνέχεια να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς μ για τους οποίους ισχύει:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+3h) - 3}{h} \mu^2 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1-2h) - 3}{h} \mu = 0$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

B₄) Αν η συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 0 και η συνάρτηση π με τύπο:

$$\pi(x) = \begin{cases} \varphi(x) \cdot \eta\mu(3x), & x \leq 0 \\ \sigma\upsilon\nu(2x) - 1 - x \cdot \varphi(x), & x > 0 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε να αποδείξετε ότι $\varphi(0) = 0$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ Γ

Έστω οι συναρτήσεις $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- Η f είναι παραγωγίσιμη και η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα με $f(0) = f'(0) = 0$
- $g'(x) = \frac{1}{1+f^2(x)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(0) = 0$
- Η h είναι παραγωγίσιμη, με $h'(0) = -1$, δεν έχει ρίζα και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f(x) = 2 + \frac{h'(x)}{h(x)}$$

Γ₁) Να μελετήσετε την g ως προς την κυρτότητα.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Γ₂) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$\frac{x}{1+f^2(x)} < g(x) < x$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Γ₃) Αν επιπλέον ισχύει $h(3)h(4) - h(2)h(3) = 0$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2, 4)$, τέτοιο ώστε να είναι $h'(\xi) = 0$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Γ₄) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [1, 3]$ τέτοιο ώστε να είναι:

$$f(1) + 4f(2) + 9f(3) = 3x_0^2 f(x_0)$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) > 2$, για την οποία ισχύει:

$$|f^2(x) - 2e^{2x}f(x) + e^{4x} - e^x| = 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ₁) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{2x} + \sqrt{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Δ₂) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f και τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Δ₃) Για κάθε $x > 0$ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$x(f'(x) + f'(2x)) < f(3x) - f(x) < x(f'(2x) + f'(3x))$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Δ₄) Σημείο $M(x, f(x))$, $x \geq 0$ κινείται στη γραφική παράσταση της f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $\ln 3 \frac{m}{s}$. Έστω A η προβολή τού M στην οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του κύκλου κέντρου M και ακτίνας MA τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $x(t_0) = \ln 8 m$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7