

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ**

**29/5/2021**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1. α)** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

**β)** Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις ακροτάτων μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$ ;

**Μονάδες 4**

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  τού  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**Μονάδες 6**

**A3.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  με τύπο  $f(x) = |\eta\mu x|$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$

**Μονάδες 3**

**A4.** Θεωρήστε τον παρακάτω συλλογισμό:

<< Αν δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορίζονται κοντά στο  $0$  και ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

τότε σε κάθε περίπτωση το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$  δεν υπάρχει.>>

**α)** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω συλλογισμό με την ένδειξη (Α) αν είναι αληθής ή με την ένδειξη (Ψ) αν είναι ψευδής.

**Μονάδες 3**

**β)** Να δώσετε ένα παράδειγμα που να τεκμηριώνει την απάντησή σας.

**Μονάδες 3**

**A5.** Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

**α)** Αν η συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , με σύνολο τιμών το  $f(A)$  αντιστρέφεται και δεν έχει ρίζα, τότε η

συνάρτηση  $\frac{f^{-1}}{f}$  έχει πεδίο ορισμού το  $f(A) \cap A$ .

**β)** Αν η συνάρτηση  $f: [0,3] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής, με  $f(0)=0$  και  $f(3)=3$  τότε η εξίσωση  $f(x) = e$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(0,3)$

**γ)** Για κάθε  $x < 0$  ισχύει  $\eta\mu x + x > 0$

**Μονάδες 6**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g$  με τύπους:

$$f(x) = 2x^3 + 3ax^2 + 6a^2x + 1, a \in \mathbb{R}^*, x \in \mathbb{R} \text{ και } g(x) = 2\ln(x+1) - 3, x > -1$$

**B1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 6

**B2.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (0,1)$  τέτοιο ώστε να είναι:

$$6\xi^2 + 6a\xi = 2 + 3a$$

Μονάδες 6

**B3.** Να αποδείξετε ότι η  $g$  αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση  $g^{-1}$ . Κατόπιν να βρείτε πότε η γραφική παράσταση της  $g$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x/x$ .

Μονάδες 6

**B4.** Αν  $h(x) = f(x) + x^4 \eta \mu \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*$ , τότε να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$$

Μονάδες 7

## ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $f(0) = 0$ , για την οποία ισχύει:

$$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 4x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 6

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1}), x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 6

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι περιττή και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

**Γ4.** Για κάθε  $\alpha > 0$  να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$2f(2\alpha) > f(\alpha) + f(3\alpha)$$

Μονάδες 7

## ΘΕΜΑ Δ

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και  $F$  μια παράγουσα της  $f, F'(x) = f(x), x \in \mathbb{R}$ ,

για τις οποίες ισχύουν:

- $f^3(x) + 3f(x) + x^3 + x - 2 = 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $g'(x) = F(x+3) - F(x) - 3f(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $g(1) = 0$

**Δ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και κατόπιν να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$

Μονάδες 6

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $g$  ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και κατόπιν να λύσετε στο  $\mathbb{R}$  την εξίσωση:

$$f\left(\left(x^2 - 1\right)^3 + x^2 - 4\right) = f^{-1}(0)$$

Μονάδες 6

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f^{-1}(0)\eta\mu x - \chi\sigma\upsilon\nu x + x^3)e^{2x}}{e^{3x} + f^{-1}(1)e^x - 2e^{2x}\eta\mu x}$$

Αν επιπλέον ισχύει:

$$xf(x) - g(x) + x^\alpha \geq 1 + 2\eta\mu(x-1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

τότε να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων  $C_f, C_g$  των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  αντίστοιχα, στο  $x_0 = 1$ , είναι παράλληλες.

Μονάδες 7