ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 135

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 51

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 23

Α4. α) Σωστό

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θέτω $u = x+1, x \in \mathbb{R}$

Ισχύει ότι $u = x+1 \Leftrightarrow x = u-1$

Είναι $f(x+1) = (x+1)\cdot e^{-x} \Leftrightarrow$

$$f(u) = u\cdot e^{-(u-1)} \Leftrightarrow$$

$$f(u) = u\cdot e^{1-u}$$

Άρα ο τύπος της f είναι $f(x) = x\cdot e^{1-x}, x \in \mathbb{R}$

Β2. Η f είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Η f είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Άρα $D_{f'} = \mathbb{R}$ και $f'(x) = \left(x\cdot e^{1-x}\right)' = (x)'\cdot e^{1-x} + x\cdot\left(e^{1-x}\right)' = 1\cdot e^{1-x} + x\cdot e^{1-x}\cdot(1-x)' =$

$$= e^{1-x} + x\cdot e^{1-x}\cdot(-1) = e^{1-x} - x\cdot e^{1-x} = (1-x)e^{1-x} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = (1-x)e^{1-x}$$

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x)e^{1-x} = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ δεκτή

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (1-x)e^{1-x} > 0 \Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$ δεκτές

ΣΠΟΥΔΗ

$f'(x)<0 \Leftrightarrow \quad x>1$ δεκτές

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f′(x)	+	0	-
f(x)	↗		↘

Θ.Ο.Μ.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση 1 το $f(1)=1$

B3. Η f′ είναι παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Άρα $D_{f''}=\mathbb{R}$ και

$$f''(x)=\left[(1-x)\cdot e^{1-x}\right]'=(1-x)'\cdot e^{1-x}+(1-x)\cdot\left(e^{1-x}\right)'=$$

$$=-e^{1-x}+(1-x)e^{1-x}\cdot(1-x)'=-e^{1-x}+(1-x)e^{1-x}\cdot(-1)=$$
$$-e^{1-x}-(1-x)e^{1-x}=-e^{1-x}\cdot(1+1-x)=-e^{1-x}\cdot(2-x)=e^{1-x}\cdot(x-2)$$

Είναι $f''(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)\quad e^{1-x}=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ Δεκτή

$f''(x)>0 \Leftrightarrow (x-2)e^{1-x}>0 \Leftrightarrow x-2>0 \Leftrightarrow x>2$ Δεκτές

$f''(x)<0 \Leftrightarrow x<2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f′′(x)	-	0	+
f(x)	∩		∪

Θ.Σ.Κ.

δεκτές

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,2]$

Η f είναι κυρτή στο $[2,+\infty)$

ΣΠΟΥΔΗ

Είναι $f\left(2\right)=2\cdot e^{1-2}=2e^{-1}$

Η C_f παρουσιάζει σημείο καμπής το $\left(2,2e^{-1}\right)$

Η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

<u>ΜΕΛΕΤΗ ΠΛΑΓΙΑΣ-ΟΡΙΖΟΝΤΙΑΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗΣ ΤΗΣ C_f ΣΤΟ</u> $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot e^{1-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^{1-x}=+\infty$$

Επομένως η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$

<u>ΜΕΛΕΤΗ ΠΛΑΓΙΑΣ-ΟΡΙΖΟΝΤΙΑΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗΣ ΤΗΣ C_f ΣΤΟ</u> $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot e^{1-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{1-x}=0\Leftrightarrow\lambda=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)-0x\right)=\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot e^{1-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}}\underset{D.L.H.}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x\right)'}{\left(e^{x-1}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}\left(x-1\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}}=0\Leftrightarrow \beta=0$$

Επομένως η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, την ευθεία με εξίσωση $y=0$, δηλαδή τον άξονα $x'x$.

B4. i) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1=\left(-\infty,1\right]$

Άρα $f(A_1)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),f(1)\right]=\left(-\infty,1\right]$, αφού

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{1-x}\right)=-\infty\cdot(+\infty)=-\infty \text{ και } f(1)=1$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_2=\left(1,+\infty\right)$

Άρα $f(A_2)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to1^+}f(x)\right)=\left(0,1\right)$, αφού

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0 \text{ και } \lim_{x\to1^+}f(x)=f(1)=1$$

ΣΠΟΥΔΗ

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $f(D_f)=f(A_1)\cup f(A_2)=(-\infty,1]$

ii) Αν $\lambda\le 0$ ή $\lambda=1$, τότε $\lambda\in f(A_1)$ και $\lambda\notin f(A_2)$

Αφού $\lambda\in f(A_1)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_1 , συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μοναδική ρίζα στο $A_1=(-\infty,1]$

Αν $0<\lambda<1$, τότε $\lambda\in f(A_1)$ και $\lambda\in f(A_2)$

Αφού $\lambda\in f(A_1)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_1 ,συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μοναδική ρίζα στο $A_1=(-\infty,1]$.

Αφού $\lambda\in f(A_2)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_2 , συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μοναδική ρίζα στο $A_2=(1,+\infty)$. Άρα η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει δύο ακριβώς ρίζες.

Αν $\lambda>1$, τότε $\lambda\notin f(A_1)$ και $\lambda\notin f(A_2)$. Άρα η εξίσωση $f(x)=\lambda$ δεν έχει ρίζα.

Συμπερασματικά, ισχύει ότι:

- Η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς δύο ρίζες για $\lambda\in(0,1)$
- Η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα για $\lambda\in(-\infty,0]\cup\{1\}$
- Η εξίσωση $f(x)=\lambda$ δεν έχει καμία ρίζα για $\lambda\in(1,+\infty)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $D_f=\left(-\infty,\dfrac{3\pi}{2}\right]$

- Για τα $x<0$ είναι $f(x)=ax^3-3x^2-x+1$ συνάρτηση συνεχής ως πολυωνυμική
- Για τα $0<x\le\dfrac{3\pi}{2}$ είναι $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ συνάρτηση συνεχής

Μελέτη Συνέχειας στο $x_0=0$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(ax^3-3x^2-x+1)=1$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu0=1$$

$$f(0)=1$$

Άρα ισχύει $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$,οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0=0$

ΣΠΟΥΔΗ

Άρα η f είναι συνεχής στο D_f

Μελέτη Παραγώγου στο $x_0 = 0$

- Αν $x<0$ είναι $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{ax^3-3x^2-x}{x} = ax^2-3x-1$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\left(ax^2-3x-1\right) = -1 \qquad (1)$

- Για τα $0<x\leq \frac{3\pi}{2}$ είναι $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x} = 0 \qquad (2)$

Από τις σχέσεις (1),(2) συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

Γ2. i)

- Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ με παράγωγο $f'(x) = -\eta\mu x$
- $f(0)=1$ και $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2} = 0$

Άρα η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$

ii) Είναι: $f'(\xi)=0 \Leftrightarrow -\eta\mu\xi = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = \pi$

Γ3. Για τα $x<0$ είναι $f(x) = ax^3-3x^2-x+1$ με $f'(x) = 3ax^2-6x-1$

Ζητάμε να αποδείξουμε ότι η f' δεν έχει ρίζα. Είναι:

$\Delta = (-6)^2 - 4\cdot 3\alpha\cdot(-1) = 36+12\alpha = 12(3+\alpha) < 0$

Άρα η f' δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Γ4. Είναι: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(ax^3) = +\infty$

Πίνακας Μονοτονίας Ακροτάτων της f

ΣΠΟΥΔΗ

x	$-\infty$		0		π		$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$		-	‖	-	0	+	
$f(x)$			↘			↗	

Θ.Ο.Ε.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\pi]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$

$y_{OE}=f(\pi)=-1$, $y_{\text{TM}}=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$

Άρα ισχύει $f(x)\geq -1$, για κάθε $x\in\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$

Επίσης θα μπορούσαμε να βρούμε το σύνολο τιμών της f που είναι $f(A)=[-1,+\infty)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι: $\ln x=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x\ln x-1=0$

Έστω η συνάρτηση K με $K(x)=x\ln x-1,\ \ x\in[1,e]$

- Η Κ είναι συνεχής στο $[1,e]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων
- $K(1)=-1<0$

$K(e)=e-1>0$

Άρα $K(1)K(e)<0$

Άρα για την K ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Bolzano οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,e)$ με $K(x_0)=0$

Είναι $K'(x)=\ln x+1>0$, για κάθε $x\in(1,e)$, οπότε η K είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,e)$, άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Δ2. Είναι:

- $f'(x)=\ln x_0-\frac{1}{x},\ x>0$ με $f'(x_0)=0$
- $f''(x)=\frac{1}{x^2}>0,\ x>0$

ΣΠΟΥΔΗ

Άρα η $f\,'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε:

$$x > x_0 \Leftrightarrow f\,'(x) > f\,'(x_0) \Leftrightarrow f\,'(x) > 0$$

$$0 < x < x_0 \Leftrightarrow f\,'(x) < f\,'(x_0) \Leftrightarrow f\,'(x) < 0$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, x_0]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$

$$y_{OE} = f(x_0) = 0$$

Δ3. Ζητάμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = h(x)$ έχει μόνο μία λύση στο $\mathbb{R}$. Είναι:

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow xe^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow xe^{-x} = \frac{{x_0}^{x+1}}{e^{x+1}} \Leftrightarrow \frac{x}{e^x} = \frac{{x_0}^{x+1}}{e^x e} \Leftrightarrow xe = {x_0}^{x+1}$$

- Αν $x \le 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη
- Αν $x > 0$ είναι:

$$\ln(xe) = \ln x^{x_0+1} \Leftrightarrow \ln x + 1 = (x_0+1)\ln x \Leftrightarrow (x_0+1)\ln x - \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

η οποία έχει μοναδική ρίζα το x_0. Για να αποδείξουμε ότι οι C_g και C_h έχουν κοινή εφαπτομένη στο x_0 αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει $h'(x_0) = g'(x_0)$
Είναι:

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x} = \frac{1-x}{e^x}$$

$$h'(x) = \frac{x_0}{e}\left(\frac{x_0}{e}\right)^x \ln\frac{x_0}{e} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \ln\frac{x_0}{e}$$

$$g'(x_0) = h'(x_0) \Leftrightarrow \frac{1-x_0}{e^{x_0}} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \ln\frac{x_0}{e} \Leftrightarrow \frac{1-x_0}{e^{x_0}} = \frac{{x_0}^{x_0} x_0}{e^{x_0} e}(\ln x_0 - 1) \Leftrightarrow$$

$$e - ex_0 = {x_0}^{x_0} x_0 (\ln x_0 - 1) \Leftrightarrow e - ex_0 = {x_0}^{x_0} x_0 \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) \Leftrightarrow \left(\ln x_0 = \frac{1}{x_0}\right)$$

$$e - ex_0 = {x_0}^{x_0} - {x_0}^{x_0} x_0 \Leftrightarrow \left({x_0}^{x_0} = e\right)$$

$e - ex_0 = e - ex_0$ ισχύει.

Δ4. Αν $d(x) = \sqrt{(x-x)^2 + \left(f(x) - \varphi(x)\right)^2} = |f(x) - \varphi(x)| = f(x) - \varphi(x)$, $x > 0$ επειδή σύμφωνα με την υπόθεση η d παρουσιάζει στο x_0 ελάχιστο ισχύει:

ΣΠΟΥΔΗ

$d(x) \geq d(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \geq \varphi(x) - \varphi(x_0)$ (1)

- Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ
- Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε:

$$\varphi'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$$

Επειδή η d παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 και το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$, σύμφωνα με το Θ. Fermat, προκύπτει ότι $d'(x_0) = 0$. Είναι :

$$d'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{d(x) - d(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \right) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) - \varphi'(x_0) = -\varphi'(x_0)$$

Άρα $d'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \varphi'(x_0) = 0$

Άρα το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ

ΣΠΟΥΔΗ

ΚΛΑΔΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Αθανάσιος Σκύφας
Παναγιώτης Γιαννάκος
Δημήτρης Ανδριώτης
Ελένη Σαρρή
Άρτεμις Σκύφα
Αμαρυλλίς Σκύφα
Λία Γρίβα
Μαργαρίτα Πιπεράκη

ΣΠΟΥΔΗ

ΣΠΟΥΔΗ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

e-spoudi