ΣΠΟΥΔΗ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

e-spoudi

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2022
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΘΕΜΑ Α

Α1.

Σελίδα σχολικού βιβλίου 28-29

Α2.

Σελίδα σχολικού βιβλίου 87

Α3.

α. Λάθος

β. Σωστό

γ. Λάθος

Α4.

α. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

β. $\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Είναι: $\bar{x} = \dfrac{25+10+5+20+15}{5} = \dfrac{75}{5} = 15 \Leftrightarrow \boxed{\bar{x} = 15}$

Είναι: $R = 25 - 5 = 20 \Leftrightarrow \boxed{R = 20}$

Β2.

Είναι

$$s^2 = \frac{(25-15)^2+(10-15)^2+(5-15)^2+(20-15)^2+(15-15)^2}{5} =$$

$$= \frac{10^2+(-5)^2+(-10)^2+5^2+0^2}{5} = \frac{100+25+100+25}{5} = \frac{250}{5} = 50 \Leftrightarrow \boxed{s^2 = 50}$$

Β3.

Είναι:

$$s^2 = \sqrt{s^2} = \sqrt{50} = \sqrt{2\cdot 25} = \sqrt{2}\sqrt{25} = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow s = 5\sqrt{2}$$

Επομένως $CV = \frac{s}{x}\cdot 100\% = \frac{5\sqrt{2}}{15}\cdot 100\% \Leftrightarrow \boxed{CV = \frac{\sqrt{2}\cdot 100}{3}\%}$

Είναι

$\frac{\sqrt{2}\cdot 100}{3} > 10 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cdot 100 > 30 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\cdot 100\right)^2 > 30^2 \Leftrightarrow 2\cdot 10000 > 900 \Leftrightarrow$
$20000 > 900$ που ισχύει.

Με βάση τα παραπάνω έχουμε ότι $CV > 10\%$

Εφόσον ο συντελεστής μεταβολής είναι μεγαλύτερος του 10%, συμπεραίνουμε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1.

Επειδή ο ρυθμός μεταβολής της f για $x = 1$ είναι ίσος με 0, είναι $f'(1) = 0 \quad (1)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με

$$f'(x) = \left(x^3 - 9x^2 + \alpha x + 1\right)' = 3x^2 - 18x + \alpha$$

Είναι: $f'(1) = 3\cdot 1^2 - 18\cdot 1 + \alpha \Leftrightarrow f'(1) = \alpha - 15 \quad (2)$

Από τις σχέσεις (1),(2) έχουμε:

$$\alpha - 15 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 15}$$

Γ2.

Για $\alpha = 15$ ο τύπος της f γίνεται:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1,\ A_f = \mathbb{R}$$

Είναι:

$$f(2) = 2^3 - 9\cdot 2^2 + 15\cdot 2 + 1 = 8 - 36 + 30 + 1 \Leftrightarrow f(2) = 3$$

Επίσης:

$$f'(x) = \left(x^3 - 9x^2 + 15x + 1\right)' \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$$

οπότε $f'(2) = 3\cdot 2^2 - 18\cdot 2 + 15 = 12 - 36 + 15 \Leftrightarrow f'(2) = -9$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $M(2, f(2))$ είναι:

$$\begin{aligned}
&y - f(2) = f'(2)(x-2)\\
&y - 3 = -9(x-2)\\
&y = -9x + 18 + 3\\
&\boxed{y = -9x + 21}
\end{aligned}$$

Γ3.

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1,\ A_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15,\ A_{f'} = \mathbb{R}$

Είναι :

$$\begin{aligned}
&f'(x) = 0 \Leftrightarrow\\
&3x^2 - 18x + 15 = 0 \Leftrightarrow\\
&x^2 - 6x + 5 = 0\\
&\Delta = (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 5 = 36 - 20 = 16\\
&x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2\cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ \text{ή} \\ x_2 = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

x	$-\infty$	1		5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

τ.μ. τ.ε.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,1]$ και $[5,+\infty)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [1,5]

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0=1$, το

$$f(1)=1^3-9\cdot 1^2+15\cdot 1+1=8$$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0=5$, το

$$f(5)=5^3-9\cdot 5^2+15\cdot 5+1=-24$$

Γ4.

Έχουμε:

$$\frac{f'(x)}{x^2-1}=\frac{3x^2-18x+15}{(x-1)(x+1)}=\frac{3\cdot\left(x^2-6x+5\right)}{(x-1)(x+1)}=\frac{3(x-1)(x-5)}{(x-1)(x+1)}=\frac{3(x-5)}{x+1}=\frac{3x-15}{x+1}$$

οπότε: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x-15}{x+1}=\frac{3\cdot 1-15}{1+1}=\frac{-12}{2}=-6$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.

Για το πεδίο ορισμού της f:

Πρέπει $x+1\neq 0$

Είναι $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x=-1$

Πρέπει $x\neq -1$

Άρα $\boxed{A_f=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο A_f ως ρητή με:

$$f'(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)'=\frac{(x)'(x+1)-x(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

Επομένως η παράγωγος της f είναι: $\boxed{f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2},\ A_{f'}=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)}$

Δ2.

Είναι: $f'(2)=\frac{1}{(2+1)^2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}\Leftrightarrow f'(2)=\frac{1}{9}$

Επομένως: $\bar{x}=\frac{1}{\frac{1}{9}}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{9}}=\frac{1\cdot 9}{1\cdot 1}=\frac{9}{1}=9\Leftrightarrow \boxed{\bar{x}=9}$

Είναι: $f'(1)=\frac{1}{(1+1)^2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow f'(1)=\frac{1}{4}$

Επομένως: $s=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{2}{4}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}}=\frac{1\cdot 2}{1\cdot 2}=\frac{2}{1}=2\Leftrightarrow \boxed{s=2}$

Δ3.

Είναι:

$\bar{x}-s=7,\quad \bar{x}+s=11$

$\bar{x}-2s=5,\quad \bar{x}+2s=13$

$\bar{x}-3s=3,\quad \bar{x}+3s=15$

Στο διάστημα (7,11) βρίσκεται περίπου το 68% των παρατηρήσεων.

Στο διάστημα (5,13) βρίσκεται περίπου το 95% των παρατηρήσεων.

Επομένως στο διάστημα (5,7) βρίσκεται περίπου το $\frac{95-68}{2}\%=\frac{27}{2}=13,5\%$ των παρατηρήσεων.

Συνεπώς στο διάστημα (5,11) βρίσκεται περίπου το 13,5%+68%=81,5% των παρατηρήσεων.

Είναι: $\frac{2000\cdot 81,5}{100}=20\cdot 81,5=1630$

Επομένως 1630 μαθητές έχουν χρόνο επιστροφής από 5 έως 11 λεπτά.

Στο διάστημα (3,15) βρίσκεται περίπου το 99,7% των παρατηρήσεων.

Επομένως στο διάστημα $(15,+\infty)$ βρίσκεται περίπου το $\frac{0,3}{2}\% = 0,15\%$ των παρατηρήσεων.

Είναι: $\frac{2000 \cdot 0,15}{100} = 20 \cdot 0,15 = 3$

Συνεπώς 3 μαθητές έχουν χρόνο επιστροφής πάνω από 15 λεπτά.

Δ4.

Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_{2000}$ οι αρχικοί χρόνοι επιστροφής των μαθητών με μέση τιμή $\bar{x} = 9$ και δικύμανση $s = 2$

Αν $y_1, y_2, \ldots, y_{2000}$ οι νέοι χρόνοι επιστροφής των μαθητών είναι:

$y_i = x_i + 3,\ i = 1,2,\ldots,2000$

Η μέση τιμή $\bar{y}$ των $y_1, y_2, \ldots, y_{2000}$ είναι:

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_{2000}}{2000} = \frac{x_1 + 3 + x_2 + 3 + \ldots + x_{2000} + 3}{2000} =$$
$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2000} + 2000 \cdot 3}{2000} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2000}}{2000} + 3 =$$
$$= \bar{x} + 3 = 0 = 9 + 3 = 12 \Leftrightarrow \boxed{\bar{y} = 12}$$

Η διασπορά s_y^2 των $y_1, y_2, \ldots, y_{2000}$ είναι:

$$s_y^2 = \frac{\left(y_1 - \bar{y}\right)^2 + \left(y_2 - \bar{y}\right)^2 + \ldots + \left(y_{2000} - \bar{y}\right)^2}{2000} =$$
$$= \frac{(x_1 + 3 - 12)^2 + (x_2 + 3 - 12)^2 + \ldots + (x_{2000} + 3 - 12)^2}{2000} =$$
$$= \frac{\left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + \left(x_2 - \bar{x}\right)^2 + \ldots + \left(x_{2000} - \bar{x}\right)^2}{2000} = s^2$$

όπου s^2 η διασπορά των $x_1, x_2, \ldots, x_{2000}$

Επομένως η τυπική απόκλιση s_y των $y_1, y_2, \ldots, y_{2000}$ είναι $s_y = s = 2 \Leftrightarrow \boxed{s_y = 2}$

Κλάδος Μαθηματικών

Φροντιστηριακού Οργανισμού

ΣΠΟΥΔΗ

Αθανάσιος Σκύφας

Παναγιώτης Γιαννάκος

Δημήτρης Ανδριώτης

Δημήτρης Κουκόσιας

Ελένη Σαρρή

Άρτεμις Σκύφα

Αμαρυλλίς Σκύφα

Λία Γρίβα

Μαργαρίτα Πιπεράκη

Άγγελος Τσακανίκας

Κωνσταντίνος Αλεβίζος

Γιάννης Λινάρδος