ΣΠΟΥΔΗ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

e-spoudi

# ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2022
# ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Σελίδα σχολικού βιβλίου 186

**Α2.** Σελίδα σχολικού βιβλίου 142

**Α3.** Σελίδα σχολικού βιβλίου 161

**Α4.**

**α)** Σωστό

**β)** Σωστό

**γ)** Σωστό

**δ)** Λάθος

**ε)** Λάθος

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** Έχουμε $D_f = (-\infty, 1]$ και $D_g = [0, +\infty)$

Είναι: $D_{fog} = \left\{x \in D_g \,/\, g(x) \in D_f\right\} = \left\{x \in [0, +\infty) \,/\, \sqrt{x} \in (-\infty, 1]\right\}$ οπότε:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Άρα

$D_{fog} = [0,1] \neq \varnothing$

Οπότε $D_h = D_{fog} = [0,1]$

και ο τύπος της h είναι:

$$h(x) = (fog)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^4 - 2\left(\sqrt{x}\right)^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

Άρα: $h(x) = (x-1)^2, D_h = [0,1]$

**Β2.** Μελέτη του 1-1 για την $h$ στο $D_h$ :

Έστω $x_1, x_2 \in D_h$ με $h(x_1) = h(x_2)$ τότε:

$$h(x_1)=h(x_2)\Leftrightarrow (x_1-1)^2=(x_2-1)^2 \Leftrightarrow |x_1-1|=|x_1-1| \overset{x_1,x_2\le 1}{\Leftrightarrow} 1-x_1=1-x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η συνάρτηση $h$ είναι 1-1 στο $D_h$.

Θα μπορούσαμε να διασφαλίσουμε το 1-1 της h και με τη μελέτη της μονοτονίας.

Η $h$ είναι συνεχής στο $D_h$ ως πολυωνυμική.

Η $h$ είναι παραγωγίσιμη στο $D_h$ ως πολυωνυμική με $h'(x)=2(x-1)$ για κάθε $x\in[0,1]$

Για κάθε $x\in[0,1]$ είναι $h'(x)\le 0$.

Άρα η $h$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_h$.

Αφού η $h$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $D_h$, το σύνολο τιμών της είναι:

$$h(D_h)=h([0,1])=[h(1),h(0)]=[0,1]$$

Επομένως $D_{h^{-1}}=[0,1]$

Για κάθε $x\in D_h$ και $y\in h(D_h)$ ισχύει:

$$h(x)=y\Leftrightarrow (x-1)^2=y\Leftrightarrow |x-1|=\sqrt{y}\Leftrightarrow 1-x=\sqrt{y}\Leftrightarrow x=1-\sqrt{y}$$

Επομένως είναι $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}$, $D_{h^{-1}}=[0,1]$

**B3.**

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x\in[0,1)\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}, \quad D_\varphi=[0,1]$$

**i.** Η φ είναι συνεχής στο (0,1) ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $\varphi(0)=1$

Για $x\in(0,1)$ είναι:

$$\varphi(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=\frac{1^2-(\sqrt{x})^2}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=$$

$$=\frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=\frac{1}{1+\sqrt{x}}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{1+0}=\dfrac{1}{1}=1$

Επομένως είναι: $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=\varphi(0)$

Είναι: $\varphi(1)=\dfrac{1}{2}$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

Επομένως είναι: $\lim\limits_{x\to 1^-}\varphi(x)=\varphi(1)$

Αφού ισχύουν:

- φ συνεχής στο (0,1)
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = \varphi(0)$ και
- $\lim\limits_{x\to 1^-} \varphi(x) = \varphi(1)$

συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο [0,1].

Εφόσον είναι:

- φ συνεχής στο [0,1] και
- $\varphi(0) \neq \varphi(1)$

συμπεραίνουμε ότι για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών στο [0,1].

**ii.** Επειδή $ημx \uparrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι $\frac{\pi}{6} < α < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow ημ\left(\frac{\pi}{6}\right) < ημα < ημ\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} < ημα < 1$

Αφού ο αριθμός ημα βρίσκεται μεταξύ των $f(0) = 1$ και $f(1) = \frac{1}{2}$, σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\varphi(x_0) = ημα$.

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** $D_f = \mathbb{R}$

Επειδή η $C_f$ διέρχεται από το $O(0,0)$, συμπεραίνουμε ότι $f(0) = 0$.

Για $x < -1$ είναι $f'(x) = -2 \Leftrightarrow f'(x) = (-2x)'$

Εφόσον οι συναρτήσεις f και 2x είναι συνεχείς στο $(-\infty, -1]$, ως συνεχείς στο $\mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει σταθερά $c_1 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $f(x) = -2x + c_1$ για κάθε $x \leq -1$ (1)

Για $x > -1$ είναι $f'(x) = 3x^2 - 1 \Leftrightarrow f'(x) = \left(x^3 - x\right)'$

Εφόσον οι συναρτήσεις f και $x^3 - x$ είναι συνεχείς στο $(-1, +\infty)$ ως συνεχείς στο $\mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει σταθερά $c_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f(x) = x^3 - x + c_2 \text{ για κάθε } x > -1 \quad (2)$$

Για $x = 0$ από τη σχέση (2) προκύπτει: $f(0) = 0^3 - 0 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0$

Επομένως η (2) γίνεται $\boxed{f(x) = x^3 - x,\ x > -1}$

Εφόσον η f είναι συνεχής στο $x_0 = -1$, ως συνεχής στο $\mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \quad (3)$$

Είναι:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (-2x + c_1) = 2 + c_1$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\left(x^3 - x\right) = -1+1=0$$

Επομένως η $(3)$, γίνεται $2+c_1=0 \Leftrightarrow c_1=-2$

Άρα, λόγω της $(1)$, προκύπτει ότι $\boxed{f(x)=-2x-2,\ x\le -1}$

Συμπερασματικά είναι: $f(x)=\begin{cases}-2x-2, & x\le -1\\ x^3-x, & x>-1\end{cases}$

**Γ2.** Η εξίσωση της εφαπτομένης $(\varepsilon)$ της $C_f$ στο σημείο $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \overset{x_0>-1}{\Leftrightarrow}$$
$$y-\left(x_0^3-x_0\right)=\left(3x_0^2-1\right)(x-x_0) \Leftrightarrow$$
$$y=\left(3x_0^2-1\right)x-3x_0^3+x_0+x_0^3-x_0 \Leftrightarrow$$
$$y=\left(3x_0^2-1\right)x-2x_0^3 \quad (1)$$

Εφόσον η ευθεία $(\varepsilon)$ τέμνει τον άξονα y'y στο -2, έχουμε ότι:

$$-2=\left(3x_0^2-1\right)\cdot 0-2x_0^3 \Leftrightarrow$$
$$-2=-2x_0^3 \Leftrightarrow x_0^3=1 \Leftrightarrow x_0=1 \quad (2)$$

Η $(1)$ λόγω της $(2)$, γίνεται $\boxed{y=2x-2}$

**Γ3.** Εφόσον το Κ είναι η προβολή το Μ στον άξονα x'x, είναι $K(x,0), x>2$

Εφόσον $MK\perp K\Gamma$, συμπεραίνουμε ότι οτ τρίγωνο ΜΚΓ είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές τις ΜΚ και ΚΓ.

Επομένως το εμβαδόν Ε δίνεται από τον τύπο:

$$E=\frac{(MK)(K\Gamma)}{2}=\frac{|2x-2||x-2|}{2}=\frac{2|x-1||x-2|}{2}=|x-1||x-2| \overset{x>2}{=} (x-1)(x-2), x>2$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $E(t)=\left(x(t)-1\right)\left(x(t)-1\right), t>0, x(t)>2$

Η Ε είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$E'(t)=x'(t)\left(x(t)-2\right)+x'(t)\left(x(t)-1\right)=$$
$$=x'(t)\left(x(t)-2+x(t)-1\right)=x'(t)\left(2x(t)-3\right) \Leftrightarrow$$
$$E'(t)=x'(t)\left(2x(t)-3\right), t>0$$

Τη χρονική στιγμή $t_0$ είναι $x(t_0)=3$ και $x'(t_0)=2$. Επομένως είναι

$$E'(t_0)=2(6-3)=2\cdot 3=6\ \frac{\text{τ.μ}}{\text{s}}$$

**Γ4.**

Είναι: $\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}(-2x-2)=+\infty$

Για $x\in(-\infty,\alpha)$ με $\alpha<0$ κατάλληλο είναι:

$$\left|\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right| = \frac{|\eta\mu f(x)|}{|f(x)|} \le \frac{1}{|f(x)|} = \frac{1}{f(x)}$$

διότι $f(x) > 0$ για $x \in (-\infty, \alpha)$ εφόσον $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Είναι: $\left|\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right| \le \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \le \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \le \frac{1}{f(x)}$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{f(x)}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = 0$, σύμφωνα με το Κριτήριο Παρεμβολής είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = 0$$

Αν $x \to -\infty$ τότε $-x \to +\infty$

Θέτουμε $u = -x$ οπότε $u \to +\infty$

Επομένως είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3} = \lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{1-(-u)^3} = \lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{1+u^3} = \lim_{u\to+\infty}\frac{u^3-u}{1+u^3} = \lim_{u\to+\infty}\frac{u^3}{u^3} = 1$$

Συνεπώς έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3} = 0 + 1 = 1$$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1. i.** Είναι:

$$f'(x) = (x - \ln(3x))' = 1 - \frac{1}{3x}(3x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}, x > 0$$

Επομένως $f \downarrow (0,1]$, $f \uparrow [1,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$ με:

$$y_{OE} = f(1) = 1 - \ln 3 < 0$$

διότι $3 > e \Leftrightarrow \ln 3 > \ln e \Leftrightarrow 1 - \ln 3 < 0$

Αν $A_1 = (0,1]$, τότε επειδή $f \downarrow A_1$ είναι:

$$f(A_1) = \left[f(1), \lim_{x\to0^+} f(x)\right)$$

Είναι:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}(x - \ln(3x)) = +\infty$$
$$\lim_{x\to0^+}\ln(3x) = \lim_{u\to0^+}\ln u = -\infty$$

Άρα: $f(A_1) = [1 - \ln 3, +\infty)$

Επειδή $0 \in f(A_1)$ η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_1$ στο $A_1$ και επειδή είναι $\downarrow$ η ρίζα είναι μοναδική.

Αν $A_2 = [1, +\infty)$, τότε επειδή $f \uparrow A_2$ είναι:

$$f(A_2) = \left[f(1), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right)$$

Είναι: $f(x) = x - \ln(3x) = x\left(1 - \frac{\ln(3x)}{x}\right)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(3x)}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(3x))'}{(x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Άρα: $f(A_2) = [1 - \ln 3, +\infty)$

Επειδή $0 \in f(A_2)$ η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_2$ στο $A_2$ και επειδή είναι $\uparrow$ η ρίζα είναι μοναδική.

Από την παραπάνω μελέτη συμπεραίνουμε ότι η f, οπότε και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες $x_1, x_2$ με $x_1 < 1 < x_2$.

**ii.** Είναι:

$$f''(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2} > 0, \text{ για κάθε } x > 0$$

Άρα η f είναι κυρτή συνάρτηση στο $A = (0, +\infty)$

**Δ2.** Είναι: $E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx$

Επειδή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ είναι:

$$E = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_2}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_2}^{x_1} (x - \ln(3x))dx =$$

$$= \int_{x_2}^{x_1} x dx - \int_{x_2}^{x_1} (x)' \ln(3x) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_2}^{x_1} - [x\ln(3x)]_{x_2}^{x_1} + \int_{x_2}^{x_1} 1\, dx =$$

$$= \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} - x_1\ln(3x_1) + x_2\ln(3x_2) + x_1 - x_2 =$$

$$= x_1^2 - \frac{x_1^2}{2} - x_2^2 + \frac{x_2^2}{2} - x_1\ln(3x_1) + x_2\ln(3x_2) + x_1 - x_2 =$$

$$= x_1(x_1 - \ln(3x_1)) - x_2(x_2 - \ln(3x_2)) - \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + x_1 - x_2 =$$

$$= x_1 \cdot 0 - x_2 \cdot 0 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - (x_2 - x_1) =$$

$$= \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2)$$

που είναι το ζητούμενο.

**Δ3.** Επειδή $f(x)<0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$ αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$x_1<2-x_1<x_2$$

Έχουμε:

$x_1<2-x_1 \Leftrightarrow 2x_1<2 \Leftrightarrow x_1<1$, ισχύει από το Δ1.i. ερώτημα

$2-x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1+x_2-2>0$, ισχύει διότι από το Δ2 ερώτημα είναι $E>0$ και $x_2-x_1>0$

**Δ4.** Η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο $x_2$ είναι:

$$(\varepsilon): y-f(x_2)=f'(x_2)(x-x_2) \Leftrightarrow$$
$$y=f'(x_2)(x-x_2)$$

Επειδή η f είναι κυρτή η εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της, εξαιρουμένου του σημείο επαφής $x_2$, βρίσκεται κάτω από την $C_f$, δηλαδή για κάθε $x\neq x_2$ ισχύει:

$$f(x)>f'(x)(x-x_2) \quad (1)$$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=1$, οπότε για κάθε $x\neq 1$ ισχύει:

$$f(x)>f(1) \Leftrightarrow f(x)>1-\ln 3 \Leftrightarrow f(x)+\ln 3>1 \quad (2)$$

Με προσθήκη των μελών των $(1),(2)$, αφού $x_2\neq 1$, προκύπτει:

$$f(x)+\ln 3>1+f'(x)(x-x_2)$$

Άρα η δοσμένη εξίσωση δεν έχει λύση.


Κλάδος Μαθηματικών

Φροντιστηριακού Οργανισμού

ΣΠΟΥΔΗ

**Αθανάσιος Σκύφας**

**Παναγιώτης Γιαννάκος**

**Δημήτρης Ανδριώτης**

**Δημήτρης Κουκόσιας**

**Ελένη Σαρρή**

**Άρτεμις Σκύφα**

**Αμαρυλλίς Σκύφα**

**Λία Γρίβα**

**Μαργαρίτα Πιπεράκη**

**Άγγελος Τσακανίκας**

**Κωνσταντίνος Αλεβίζος**

**Γιάννης Λινάρδος**

# ΣΠΟΥΔΗ