ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
13/5/2023

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε λέμε ότι η συνάρτησης f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α2. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g με τύπους:

$$f(x) = -e^x,\ x \in \mathbb{R} \ \text{ και } \ g(x) = e^{|x|},\ x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 3

Α3. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 4

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

<< Αν δυο συναρτήσεις f και g ορίζονται στο διάστημα $(-\infty,\alpha)$ και ισχύουν:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \ \text{ και } \ \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

τότε σε κάθε περίπτωση το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ δεν υπάρχει. >>

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α αν είναι αληθής ή το γράμμα Ψ αν είναι ψευδής.

Μονάδες 2

β. Να δώσετε παράδειγμα της επιλογής σας, που να τεκμηριώνει την απάντησή σας.

Μονάδες 2

Α5. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Αν η συνάρτηση $f:A\to f(A)$ παρουσιάζει στο $x_0\in A$ μέγιστο το $f(x_0)$, τότε σε κάθε περίπτωση $f(x_0)\in A\cap f(A)$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε σε κάθε περίπτωση ο αριθμός $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ ανήκει στο $[\alpha,\beta]$

δ) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής με $f(1)=2$ και $f(2)=3$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε να είναι $f(x_0)=e$

ε) Ισχύει $x-\eta\mu x<0$ για κάθε $x<0$

Μονάδες 10

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, με $f(e)=2$, για την οποία ισχύει:

$$\left(\ln x^{f(x)-1}-1\right)\left(\ln x^{f(x)-1}+1\right)=0,\ \text{για κάθε } x>1$$

Β1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{\ln x}+1,\ x>1$

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτησης f^{-1}

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C_f της f. Στη συνέχεια να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)-1}{f^{-1}(x)-1}$ **β)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left((f(x)-1)(\eta\mu x - 1)\right)$

Μονάδες 6

Β4. Σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$ κινείται στη γραφική παράσταση C_f της f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $1\dfrac{cm}{s}$. Αν η εφαπτομένη της C_f στο Μ τέμνει τον άξονα y′y στο Α, τότε να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του Α τη χρονική στιγμή που είναι $\alpha = e^2$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

- $f''(x) = 2 + \dfrac{1}{x^2} + \eta\mu(x-1)$, για κάθε $x > 0$
- $f(1) = 1 - \ln 3$ και $f'(1) = 0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 - \ln(3x) - \eta\mu(x-1),\ x > 0$

Μονάδες 6

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο ακριβώς ρίζες $\rho_1 < \rho_2$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\ln(9\rho_1\rho_2) > -\eta\mu(\rho_1 - 1) - \eta\mu(\rho_2 - 1)$$

Μονάδες 6

Γ4. Να λύσετε στο διάστημα $(0,+\infty)$ την ανίσωση:

$$f'(|\eta\mu x| + 2) - f'(x+1) < f'(x+2) - f'(|\eta\mu x| + 1)$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) + (x-1)^2 f(x) = e^{x-1} - x\ln x - 1$, για κάθε $x > 0$
- $f(e) = 0$ και $f(1) = -1$

Δ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της f στο $x_0 = 1$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 1$

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+4h) - 4f(x+3h) + 4f(x+2h) - f(x)}{h^3 - h^2}$$

Μονάδες 5

Δ4. Αν F είναι μια παράγουσα της f, με $F(e) = 0$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, e)$, τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f''(\xi)F(\xi) + f'(\xi)f(\xi) = (e - \xi)f'''(\xi) - f''(\xi)$$

Μονάδες 5

Δ5. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{1}{3}\int_1^e (x-1)^3 f'(x)\,dx + \int_1^e e^{x-1}\,dx$$

Μονάδες 5