

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΤΜΗΜΑΤΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ - ΠΓΘΣ**

**23-07-2022**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  μιας συνάρτησης  $f$

**Μονάδες 4**

**A2. α)** Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο  $A$ ;

**Μονάδες 2**

**β)** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  με τύπο:

$$f(x) = |\ln x|, x > 0$$

**Μονάδες 2**

**A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

<< Αν δυο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  ορίζονται κοντά στο  $x_0 \in \mathbb{R}$  και ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

τότε σε κάθε περίπτωση το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  δεν υπάρχει. >>

**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα  $A$  αν είναι αληθής ή το γράμμα  $\Psi$  αν είναι ψευδής.

**Μονάδες 2**

**β.** Να δώσετε παράδειγμα σε  $x_0 \in \mathbb{R}$  της επιλογής σας, που να τεκμηριώνει την απάντησή σας.

**Μονάδες 3**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σωστό ( $\Sigma$ ) ή Λάθος ( $\Lambda$ ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

**α)** Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $-f$  και  $f$  είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα  $y'y$

**β)** Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $|f|$  είναι σε κάθε περίπτωση συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$

γ) Αν  $p(x)$  πολυωνυμική συνάρτηση, τότε  $\lim_{x \rightarrow 2} p(x) = p(2)$

δ) Η γραφική παράσταση κάθε σταθερής συνάρτησης  $f(x) = c, c \neq 0, x \in \mathbb{R}$  έχει ένα ακριβώς κοινό σημείο με τον άξονα  $x'x$

ε) Αν ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , τότε σε κάθε περίπτωση είναι  $f(x) = 0$  κοντά στο  $x_0$

στ) Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\alpha x)}{\beta x} = \frac{\beta}{\alpha}$  για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$

Μονάδες 12

### ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  με τύπους:

$$f(x) = x^2 - 7x, x \in [-7, 11)$$

$$g(x) = x^2 + 2, x \in [-12, 0)$$

**B1.** Να ορίσετε τις συναρτήσεις  $f \circ g$  και  $g \circ f$

Μονάδες 8

**B2.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x+4} - 2}$

Μονάδες 5

**B3.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(7x)}{f(x)}$

Μονάδες 5

**B4.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( (f(x) - 7x) \eta\mu \frac{1}{x} \right)$

Μονάδες 7

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g, h$  για τις οποίες ισχύουν:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + \beta x - 1, & x \leq 1 \\ (\alpha - 2) \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} + 3, & x > 1 \end{cases}$$

$$g(x) = 2e^{x-1} - f(x), x > 1$$

$$h(x) = \ln(5 - x) - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 2$  και  $\beta = 2$

Μονάδες 5

**Γ2.** Να ορίσετε τη συνάρτηση  $\varphi = \frac{g}{h}$

Μονάδες 7

**Γ3.** Να βρείτε πότε η γραφική παράσταση της  $g$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$

Μονάδες 7

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι η  $h$  αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση

Μονάδες 6

### ΘΕΜΑ Δ

Έστω οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) > x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $f^2(x) - 2x f(x) = 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (g^5(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x^2 - x} + 1$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 6

**Δ2.** Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

Μονάδες 6

**Δ3.** Για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x^2 + 1} - \lambda x^2 + 1}{|x - 1|}$$

Μονάδες 6

**Δ4.** Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης  $h$  με τύπο  $h$  με τύπο:

$$h(x) = (x^2 + 1)^{f(x) - \sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:  $\frac{h'(1)}{h'(-1)} = 4$

Μονάδες 7

ՀԻՉՈՎԱՆԻ