ΣΠΟΥΔΗ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

e-spoudi

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

**27-07-2023**

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Να δώσετε τον ορισμό της ισότητας δύο συναρτήσεων f και g.

**Μονάδες 4**

**Α2. α)** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

**Μονάδες 3**

**β)** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράστασης της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x) = |\ln x|, x > 0$$

**Μονάδες 3**

**Α3.**Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ.

**Μονάδες 3**

**Α4.** Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

**α)** Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $-f$ και f είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$

**β)** Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $f^{-1}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$

**γ)** Αν $f(x) = συνx,\ x \in \mathbb{R}$ , τότε $f'(x) = ημx$

**δ)** Η γραφική παράσταση κάθε γνησίως αύξουσας συνάρτησης έχει ένα ακριβώς κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$

**ε)** Αν ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε είναι $f(x) > 0$ κοντά στο $x_0$

**στ)** Ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ημ(αx)}{x} = 1$ για κάθε $α \in \mathbb{R}^*$

**Μονάδες 12**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$f(x) = x^2 - 5x,\ x \in [-7,10)$$

$$g(x) = x^2 + 1,\ x \in [-6,0)$$

ΣΠΟΥΔΗ

**Β1.** Να ορίσετε τις συναρτήσεις $fog$ και $gof$

**Μονάδες 10**

**Β2.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x+4}-3}$

**Μονάδες 7**

**Β3.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu(7x)}{x}+x\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right)$

**Μονάδες 4**

**Β4.** Αν η συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι περιττή και ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\left(h(x)\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}x\right)-f(x)-x^2+1\right)=14$$

τότε να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to -1}h(x)$

**Μονάδες 4**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται οι συναρτήσεις $f$ , $g$ , $h$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+\beta x+1, & x\le 1\\ (\alpha-1)x^3+3, & x>1\end{cases}$
- $g(x)=2\ln(x-1)+f(x),\ x>1$
- $h(x)=\ln(3-x)-1$
- $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=3$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=1$

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η $g$ αντιστρέφεται και κατόπιν να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση.

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $\varphi=\dfrac{g}{h}$ και κατόπιν να βρείτε, αν υπάρχει, το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της φ με τον άξονα $x'x$ **.** Να βρείτε πότε η γραφική παράσταση της h βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να βρείτε όπου ορίζεται την παράγωγο των συναρτήσεων:

**α)** $f(x)=\begin{cases}(x^2+7)\eta\mu x, & x\le 0\\ x^3\sigma\upsilon\nu x+7x, & x>0\end{cases}$ **β)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{2}x, & x<0\\ 2\sqrt{x}+x, & x\ge 0\end{cases}$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται οι συναρτήσεις $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπους:

$$g(x)=x^2+1 \text{ και } h(x)=-x^2+\alpha x+\frac{1}{2}$$

ΣΠΟΥΔΗ

όπου α θετικός ακέραιος και η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ την οποία ισχύουν:

- $f^2(x) - x^2 = 2f(x)\eta\mu x + \alpha\sigma\upsilon\nu^2 x$
- $f(x) > \eta\mu x,$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

**Δ1.** Αν η γραφική παράσταση της g βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της h, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \eta\mu x,\ x \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ β) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f^2(x) - f(x) + 2}{f^3(x) + 3}$

**Μονάδες 6**

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\left(f(x) - \eta\mu x\right)^2 - \lambda x}{|x - 1|}$$

**Μονάδες 6**

ΣΠΟΥΔΗ