ΣΠΟΥΔΗ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ
e-spoudi

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

2-12-2023

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 2

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Μονάδες 3

Α4. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ στο $x_0=1$ έχει εξίσωση $y=3x$, τότε είναι:

α) $f'(1)=1$ **β)** $f(1)-f'(1)=3$ **γ)** $f(1)=f'(1)$ **δ)** $f(1)=1$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 4

Α5. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=e^x+\ln(x+1)-1$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Η συνάρτηση με τύπο $f(x)=e^x+\ln x,\ x>0$ αντιστρέφεται.

γ) Αν $f(x)=x+\ln x,\ x>0$, τότε είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, τότε και η συνάρτηση $\sqrt[v]{f}$ είναι συνεχής στο x_0 με την προϋπόθεση ότι ορίζεται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους:

$$f(x)=\ln(x-1)+1,\ x>1 \text{ και } g(x)=e^{x-2}+1,\ x\in\mathbb{R}$$

Β1. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $h = \frac{f}{g}$ και $z = fog$

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της h στο $x_0 = 2$

Μονάδες 6

Β3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 6 - x^2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2, e+1)$

Μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+3h)-1}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(2-h)-2}{h}$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = e^{x-2} + x^3 - 1,\ x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και κατόπιν να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1}

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f έχει μια ακριβώς ρίζα η οποία ανήκει στο διάστημα $(0,1)$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [10, 30]$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f(10) + f(20) + f(30) = 3f(x_0) + 3x_0 - 60$$

Μονάδες 6

Γ3. Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη , τότε να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} στο $x_1 = 8$

Μονάδες 6

Γ4. Σημείο Μ κινείται στη γραφική παράσταση της f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $2\ m/s$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης τη χρονική στιγμή t_0 που η τεταγμένη είναι ίση με 8.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $x^2 f^2(x) - 4xf(x)\eta\mu x = x^4 - 4\eta\mu^2 x$
- $f(\pi) = \pi$

και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ στο $x_0 = \pi$

ΛΟΥΔΗ

Δ1 Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} x+2\dfrac{\eta\mu x}{x}, & x>0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x)\le x+2$, για κάθε $x\ge 0$

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=4x+1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

Μονάδες 6

Δ4. Αν ισχύει $\left(f(x)-\pi\right)^2+g^2(x)=(x-\pi)^2$, για $x>0$, τότε να αποδείξετε ότι :

$$\left(f'(\pi)\right)^2+\left(g'(\pi)\right)^2=1$$

Μονάδες 7

,

ΣΠΟΥΔΗ