ΣΠΟΥΔΗ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

e-spoudi

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΜΗΜΑΤΑ: $2^{Ο}$ - $4^{Ο}$ ΠΕΔΙΟ

2/3/2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε τα θεωρήματα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής και Bolzano.

Μονάδες 4

Α2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω συλλογισμό:

<< Αν η συνάρτηση f είναι ρητή με συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων α, β και $\alpha.\beta > 0$, τότε σε κάθε περίπτωση θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)συνx) = +\infty$ >>

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω συλλογισμό με την ένδειξη (Α) αν είναι αληθής, ή με την ένδειξη (Ψ) αν είναι ψευδής.

β) Να δώσετε παράδειγμα που να τεκμηριώνει την απάντησή σας.

Μονάδες 4

Α4. . Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x) > 0$ στο (α,x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0,β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 5

Α5. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, με σύνολο τιμών το $f(A)$ αντιστρέφεται, τότε η συνάρτηση $f.f^{-1}$ έχει πεδίο ορισμού το $f(A)$

β) Μία πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού μπορεί να έχει ασύμπτωτες.

ΣΠΟΥΔΗ

γ) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι $1-1$, τότε η εξίσωση $f(x)=y$, για κάθε y του συνόλου τιμών της, έχει μία μόνο λύση ως προς y.

δ) Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης είναι σε κάθε περίπτωση ολικό μέγιστό της.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h με τύπους:

$$f(x)=e^{x-1}+x-1,\ x\in\mathbb{R},\ g(x)=\ln(x+1)+1, x>-1$$

$$h(x)=\sqrt{x^2+1-\sigma\upsilon\nu x}-x^2\eta\mu\frac{1}{x},\ x\in\mathbb{R}^*$$

Β1. Να ορίσετε τις συναρτήσεις fog και $\frac{f}{g}$

Κατόπιν να βρείτε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα :

$$\int_0^{e-1}(fog)(x)dx.$$

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)$

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim\limits_{x\to1}\frac{\left|f^3(x)+3f(x)-3\right|-\left|f(x)-2\right|}{f(x)-1}$

Μονάδες 6

Β4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(x)}{x^2+1}=\frac{2x-(\alpha+\beta)}{(x-\alpha)(x-\beta)}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α,β)

Μονάδες 7

ΣΠΟΥΔΗ

ΘΕΜΑ Γ

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν:

- $f^2(x)+2f(x)\ln x-x^6=36\eta\mu^2x+12x^3\eta\mu x-\ln^2 x,\ x>0$
- $g(x)+6\eta\mu x\le f(x),\ x>0$
- $f(1)>0$ και $g(1)=1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=-\ln x+x^3+6\eta\mu x,\ x>0$$

Μονάδες 6

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f' έχει μία ακριβώς ρίζα ρ. Στη συνέχεια να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι $\rho<1$ **Μονάδες 6**

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο $x_0=1$, εφάπτεται και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h με τύπο:

$$h(x)=x^2-2x+3$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν:

- $f(0)=1$ και $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f'(x)=f(x)\dfrac{2x^3}{x^2+1}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{e^{x^2}}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$ **Μονάδες 6**

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Στη συνέχεια να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β αν γνωρίζετε ότι ισχύει:

$$f(2\alpha+\beta-3)+f(\alpha-\beta)=2$$

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο διάστημα $(-2,2)$

Μονάδες 6

ΛΥΣΕΙΣ

Δ4. Σημείο $M(x,f(x))$, $x \geq 0$ κινείται στη γραφική παράσταση της f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $1\frac{m}{s}$. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση $Π(0,30)$ και παρατηρεί την κίνηση του Μ όσο χρόνο η προβολή του στον άξονα y′y βρίσκεται μεταξύ του Ο και του Π. Αν Α είναι η προβολή τού Μ στον άξονα x′x ,τότε να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τετραπλεύρου ΜΑΟΠ τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $x(t_0)=1$

Μονάδες 7

ΣΠΟΥΔΗ