ΣΠΟΥΔΗ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

e-spoudi

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΜΗΜΑΤΑ: $2^{Ο}$ - $4^{Ο}$ ΠΕΔΙΟ - ΑΠΟΦΟΙΤΟΙ

20/1/2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.

Μονάδες 3

Α2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν ισχύουν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να είναι $f(x_0) = \eta$

Μονάδες 6

Α4. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x) = |\ln x|, x > 0$ **β)** $g(x) = e^{-x}, x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 4

Α5. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0

β) Αν ισχύουν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, τότε είναι $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = 0$

γ) Μία συνεχής συνάρτηση f σε κάθε περίπτωση αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν μίας ρίζας της.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,2]$ και $f(0)=1$, $f(2)=3$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε να είναι $f(x_0) = e$.

Μονάδες 8

ΣΠΟΥΔΗ

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $g(x)=x^3+1,\ x\in\mathbb{R}$
- $\left(ef(x)-2e\right)^3-e^{3x}=0,\ x\in\mathbb{R}$

Β1. Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{x-1}+2,\ x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 6

Β3. Αν $h(x)=f(x)-3,\ x\in\mathbb{R}$, τότε να βρείτε πότε η γραφική παράσταση C_h της h βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ και κατόπιν να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{g(x)+\eta\mu x}-1}{x^2-x}$$

Μονάδες 6

Β4. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την ανίσωση:

$$f^3(x)+f(x)-30>0$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπους:

$$f(x)=x^7+x-1,\ x\in\mathbb{R}$$

$$g(x)=f^2(x)+x^2-x,\ x\in\mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f έχει μια ακριβώς ρίζα ξ στο διάστημα $(0,1)$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι η g έχει δύο τουλάχιστον ρίζες ξ_1,ξ_2 στο διάστημα $(0,1)$

Μονάδες 7

Γ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον $x_1,x_2\in(0,1)$, τέτοια ώστε να είναι:

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=1$$

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$f(x)=x^7+e^{3x}+3x+\lambda$$

έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$

Μονάδες 6

Γ4. Σημείο Μ κινείται στη γραφική παράσταση της f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $1\frac{m}{s}$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης τη χρονική στιγμή t_0 που η τεταγμένη είναι ίση με $1\,m$

Μονάδες 6

ΣΠΟΥΔΗ

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(0)=0$, για την οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x)=2x+\frac{2x}{e^{f(x)-x^2}}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=x^2+\ln(x^2+1),\ x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 6

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

Μονάδες 6

Δ3. Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $g(0)=2$ ισχύει:

$$g(x)\le f(x)+3x+2,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

τότε να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο $x_0=0$

Μονάδες 6

Δ4. Για κάθε $x>0$ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$(1+x-\eta\mu x)f(x)<xf(x+1)-\eta\mu x\,f(x+1)+f(\eta\mu x)$$

Μονάδες 7

ΣΠΟΥΔΗ