ΣΠΟΥΔΗ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

e-spoudi

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΜΗΜΑΤΑ: $2^{Ο}$ - $4^{Ο}$ ΠΕΔΙΟ

20/4/2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x τού Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Μονάδες 8

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το Α, παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 3

Α3. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:

α) $(\eta\mu x)' = ...$ $(\varepsilon\varphi x)' = ...$ $\left(e^{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = ...$

β) $\left(\alpha^x\right)' = ...$ $\left(x^\alpha\right)' = ...$ $\left(e^{\ln x}\right)' = ...$

γ) $\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' = ...$ $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = ...$ $\left(f^v(x)\right)' = ...$

δ) $\left(\ln|f(x)|\right)' = ...$ $\left(|f(x)|\right)' = ...$ $\left(\alpha^{f(x)}\right)' = ...$

Μονάδες 7

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

<< Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ, τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό τού Δ >>

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α αν είναι αληθής ή το γράμμα Ψ αν είναι ψευδής.

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με παράδειγμα της επιλογής σας.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$f(x) = \frac{x+4}{x-3},\ x > 3 \text{ και } g(x) = e^x + 1,\ x \in \mathbb{R}$$

ΣΠΟΥΔΗ

Β1. Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = fog$

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1}

Μονάδες 6

Β3. Να μελετήσετε την h^{-1} ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Β4. Αν για τη δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\varphi''(x) = 6g^2(x) + 2\alpha g(x) + 1, x \in \mathbb{R}$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ με $\alpha^2 < 6$, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, F μια παράγουσα της f, G μια παράγουσα της g και η συνάρτηση $H : [1, \alpha] \to \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα με $f(0) > 0$
- $\dfrac{g(x) - e^x}{f(x) + e^x} < \dfrac{G(x) - e^x}{F(x) + e^x}$, για κάθε $x \geq 0$ και $F(0) = G(0) = 0$
- $H'(x) = \ln x f(x)$, $x \in [1, \alpha]$ και $H(1) = 0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$, τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$(\xi - 1)f(\xi) + 3\xi^2 - 1 = (\xi^2 - 1)g(\xi)$$

Μονάδες 6

Γ2. Για κάθε $x > 0$ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$F(x) < -G(x)$$

Μονάδες 6

Γ3. Για κάθε $\alpha > 1$ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$H(\alpha) > f(1) + f(1)(\alpha \ln \alpha - \alpha)$$

Μονάδες 6

Γ4. Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης κ με τύπο:

ΣΠΟΥΔΗ

$$\kappa(x) = F(x),\ x \in [0,+\infty)$$

και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$, τότε να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$E < -G(1) - \int_0^1 xf(x)dx$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο, η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: [0,\alpha] \to \mathbb{R}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ και G μια παράγουσα της g, για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x)e^{f(x)} = \frac{1}{2}f^2(x) + f(x) + e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $g'(x) = f(x)\eta\mu x$, $x \in [0,\alpha]$ και $g(0) = G(0) = 0$

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$, τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi)(f(1) + f(0) + 2) = 2\int_0^1 \frac{e^x}{e^{f(x)} - 1}dx$$

Μονάδες 6

Δ3. Για κάθε $x_1, x_2 \in (0,\alpha)$ με $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$(\alpha - x_2)g(x_1) < x_1 g(\alpha) - x_1 g(x_2)$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$G(\alpha) > (\alpha - \eta\mu\alpha)f(0)$$

Μονάδες 7

ΣΠΟΥΔΗ