ΣΠΟΥΔΗ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

e-spoudi

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΜΗΜΑΤΑ: 2^{Ο} - 4^{Ο} ΠΕΔΙΟ

23/3/2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

Α2. α) Πότε λέμε ότι δύο συναρτήσεις f, g είναι ίσες;

β) Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ;

Μονάδες 5

Α3. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή:

$$G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 6

Α4. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν η συνάρτηση f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = x_0$, τότε σε κάθε περίπτωση το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν την ευθεία με εξίσωση $y = 1$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, τότε και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f + g$ έχει στο $+\infty$ την ίδια οριζόντια ασύμπτωτη.

γ) Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα, με συνεχή παράγωγο και ισχύει $\int_{2\alpha+3}^{3\alpha+3} f'(x)\,dx > 0$ τότε θα είναι $\alpha > 0$

δ) Ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1 + x}{x} = 1$

ε) Το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x-1}}$ είναι καλά ορισμένο.

Μονάδες 10

ΣΠΟΥΔΗ

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους:

$$f(x)=e^{x-1}+\sqrt{x}-2, x\geq 0 \text{ και } g(x)=\ln x+1, x>0$$

Β1. Να ορίσετε τη συνάρτηση fog

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Β3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,9)$

Μονάδες 6

Β4. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda\neq 2$ να βρείτε, αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\lambda g(e)-4}{(x-1)^2}$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)=\frac{1}{x^2-4x+5}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- Το 2 είναι ρίζα της f και το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. Κατόπιν να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C_f της f.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράστασης της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=2$, $x=3$

Μονάδες 6

Γ3. Για κάθε $x>2$ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{x-2}{x^2-4x+5}<f(x)<x-2$$

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0=2$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι ισχύει:

ΛΥΣΗ

$$\int_0^2 e^x f(x)dx > 3 - e^2$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, F μια παράγουσα της f με $F(1) = 3$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\int_{f(3)}^{f^2(3)} f(x)dx > 0$
- $g(x) \geq x^2 + F(x) - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(1) = 2$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(3) > 1$

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^5(x) + \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)}{x^2}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,3)$

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι ισχύουν:

α) $F(x) - F(\eta\mu x) < (x - \eta\mu x)(F(x+1) - F(x))$, για κάθε $x > 0$

β) $\int_{-1}^{0} f^2(x)dx > F(-1) - \int_{-1}^{0} F(x)\,dx$, για κάθε $x \leq 0$

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι $g'(1) = 2 + f(1)$

Μονάδες 6

ΣΠΟΥΔΗ