ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΜΗΜΑΤΑ: $2^{Ο}$ - $4^{Ο}$ ΠΕΔΙΟ

27/4/2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με γραφική παράσταση C_f, η οποία έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$. Να γράψετε τους τύπους με τους οποίους υπολογίζονται τα παρακάτω ζητούμενα:

α) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τον άξονα $x'x$

Μονάδες 2

β) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$

Μονάδες 3

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $-\infty$;

Μονάδες 4

Α4. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Μονάδες 8

Α5. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Για κάθε παραγωγίσιμη και γνησίως μονότονη συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[\alpha,\beta]$.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $A=[\alpha,\beta]$ και το μηδέν ανήκει στο σύνολο τιμών της $f(A)$, τότε η f σε κάθε περίπτωση έχει μια ακριβώς ρίζα.

γ) Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής, τότε σε κάθε περίπτωση αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν κάθε ρίζας της.

δ) Τα ακρότατα μιας συνάρτησης σε κάθε περίπτωση ανήκουν στο σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

ΣΠΟΥΔΗ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 + x - 2,\ x \in \mathbb{R}$

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. Κατόπιν να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

. **Μονάδες 8**

Β2. Να βρείτε την εξίσωση (ε) της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$

Μονάδες 5

Β3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την εφαπτομένη (η) της C_f στο $x_0 = 1$

Μονάδες 6

Β4. Σημείο $M(x(t), y(t)),\ x(t) \geq 1$ κινείται στη γραφική παράσταση της f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $1\frac{m}{s}$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΜΚ όπου Κ η προβολή του Μ στον άξονα x'x τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $y(t_0) = 28$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ και ισχύουν:

- $f'(x) = 2e^{-f(x)+3x-1} + 1$, για κάθε $x > 0$
- $f(1) = \ln(e^2 - 1)$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(e^{2x} - 1) + x - 1,\ x > 0$

Μονάδες 5

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα. Κατόπιν να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f

Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f **Μονάδες 5**

ΣΠΟΥΔΗ

Γ5. Αν η f^{-1} είναι συνεχής, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$, τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\int_{\ln(e^2-1)}^{\ln(e^4-1)+1} f^{-1}(x)dx = f'(\xi) + f(2) - \int_1^2 f(x)dx$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες, F, G είναι παράγουσες των f,g αντίστοιχα και ισχύουν:

- $f(x)g(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0)g(2) = f(2)g(0)$
- $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x) - \dfrac{\eta\mu(x-1)}{x^2-x} - \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}\right) = \dfrac{3}{2}$
- $F(0) = G(0) = 0$

Έστω $E_1 = F(1)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της f, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ και $E_2 = G(1)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g της g και τις ίδιες ευθείες.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$(x-1)f(x+1) = (1-x)\int_0^1 f(t)dt \; - \; x\int_0^2 g(t)dt$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,2)$, τέτοιο ώστε να είναι:

$$f(2-\xi)g'(\xi) - f'(2-\xi)g(\xi) = F(2-\xi) - \xi f(2-\xi)$$

Μονάδες 6

Δ3. Αν $E_1 = E_2$, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

Μονάδες 6

Δ4. Αν $E_1 \neq E_2$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε να είναι:

$$f(x_0) = g(x_0) + E_1 - E_2$$

Μονάδες 7

ΧΙΟΥΔΗ