ΣΠΟΥΔΗ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

e-spoudi

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΜΗΜΑΤΑ: 2Ο - 4Ο ΠΕΔΙΟ

6/4/2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε λέμε ότι η συνάρτησης f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α2. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g με τύπους:

$$f(x) = -e^x,\ x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = e^{|x|},\ x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 3

Α3. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 4

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

<< Αν δυο συναρτήσεις f και g ορίζονται στο διάστημα $(-\infty,\alpha)$ και ισχύουν:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$

τότε σε κάθε περίπτωση το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ δεν υπάρχει. >>

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α αν είναι αληθής ή το γράμμα Ψ αν είναι ψευδής.

Μονάδες 2

β. Να δώσετε παράδειγμα της επιλογής σας, που να τεκμηριώνει την απάντησή σας.

Μονάδες 2

Α5. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Αν η συνάρτηση $f:A\to f(A)$ παρουσιάζει στο $x_0\in A$ μέγιστο το $f(x_0)$, τότε σε κάθε περίπτωση $f(x_0)\in A\cap f(A)$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε σε κάθε περίπτωση ο αριθμός $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx$ ανήκει στο $[\alpha,\beta]$

δ) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής με $f(1)=2$ και $f(2)=3$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε να είναι $f(x_0)=e$

ε) Ισχύει $x-\eta\mu x<0$ για κάθε $x<0$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπους:

$$f(x)=e^{2x}+3x^3+x+1 \text{ και } g(x)=3e^{-7x}-6x-1$$

Β1. Να αποδείξετε ότι οι f, g αντιστρέφονται και κατόπιν να βρείτε τα σύνολα τιμών τους.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της f, την εφαπτομένη της C_f στο $x_0=0$, τον άξονα x′x και τις ευθείες $x=0$, $x=1$

Μονάδες 7

Β4. Να λύσετε την ανίσωση:

ΣΠΟΥΔΗ

$$e^{2x^2-6}+3\left(x^2-3\right)^3<e^2-x^2+7$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

- $12x^2f(x)+8x^3f'(x)+\left(x^4+1\right)f''(x)=20x^3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $3f(1)=f'(1)=\dfrac{3}{2}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{x^5}{x^4+1}$, $x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 6

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή. Στη συνέχεια αν $g(x)=\dfrac{xf(x)}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$ τότε να αποδείξετε ότι ισχύουν:

α) $g(x)+g(-x)=xf(x), x\in\mathbb{R}$

β) $\int_{-1}^{1}g(x)dx=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}\dfrac{x^2}{x^4+1}dx$

Μονάδες 6

Γ4. Αν F είναι μια παράγουσα της f με $F(2)=0$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,2)$, τέτοιο ώστε να είναι:

$$F(\xi+2)=(2-\xi)f(\xi+2)$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, F μια παράγουσα της f και η συνάρτηση g με τύπο:

$$g(x)=F(2-x)-F(x),\ x\in\mathbb{R}$$

Δ1. Να μελετήσετε την g ως προς την κυρτότητα.

Μονάδες 6

ΣΠΟΥΔΗ

Δ2. Να αποδείξετε ότι ισχύουν:

α) $2g'(2) > g'(1) + g'(3)$

β) $2F\left(\frac{1}{2}\right) + F(2) > 2F\left(\frac{3}{2}\right) + F(0)$

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h με τύπο $h(x) = x^2 g''(x)$, $x \in \mathbb{R}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$ δίνεται από τον τύπο:

$$E = 2\left(\int_0^1 g(x)dx - f(1)\right)$$

Μονάδες 5

Δ4. Αν επιπλέον ισχύει:

$$F(x^2) - F(2x^2 - x) \geq x^2 - x \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$, τέτοιο ώστε να είναι $f'(\xi) = 0$

Μονάδες 6

ΣΠΟΥΔΗ