ΣΠΟΥΔΗ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

e-spoudi

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΜΗΜΑΤΑ: 2^{Ο} - 4^{Ο} ΠΕΔΙΟ

9/3/2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα. Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$

Μονάδες 3

Α2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 3

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και κατόπιν να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 3

Α4. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ Αν ισχύουν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε να είναι $f(x_0)=\eta$

Μονάδες 6

Α5. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\alpha^{-x}$, $\alpha>1, x\in\mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα.

β) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και οι αριθμοί 0, 3 είναι διαδοχικές ρίζες της, τότε είναι $f(1)f(2)<0$

γ) Οι συναρτήσεις με τύπους $f(x)=e^{-x}, x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\ln x, x>0$ έχουν γραφικές παραστάσεις συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.

δ) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και δεν έχει ρίζα, τότε είναι:

$$f(2021)f(2022)>0$$

ε) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu(\alpha x)}{x}=\alpha$, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}^*$

Μονάδες 10

ΣΠΟΥΔΗ

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους:

$$f(x)=\ln\left(x^3+1\right)+1 \text{ και } g(x)=e^{x-1}-2$$

Β1. Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$

Μονάδες 6

Β2. Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = gof$

Μονάδες 6

Β3. Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση.

Μονάδες 7

Β4. Αν για τη συνεχή συνάρτηση $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\lim_{x\to 1}\left(\Phi(x)+2x^2+g(x)\right)=3$$

τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\Phi(1)x^7+x-\Phi(1)=0$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f^2(x)-4xf(x)=1-3x^2, x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$
- $g(x)=f(x)+\eta\mu x, x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}+2x, x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

Κατόπιν να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_1^{\sqrt{3}} xf(x)\,dx$$

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(x)}{x-1}+\frac{g(x)}{x-\pi}=1$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,\pi)$

Μονάδες 8

Γ4. Για τις διάφορες τιμές τού $\lambda\in\mathbb{R}$ να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο:

ΣΤΟΥΔΗ

$$\lim_{x\to 1}\frac{\lambda x^2+f(x)-\sqrt{x^2+1}}{|x-1|}$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\ln(x-1)+e^{x-2}+x-4,\ x>1$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1}.Κατόπιν να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f έχει μία ακριβώς ρίζα ρ με $\rho>2$.Στη συνέχεια να βρείτε πότε η γραφική παράσταση C_f της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0=2$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\int_3^4 f(f(x))\,dx>\frac{7}{2}$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[2,6]$ τέτοιο ώστε να είναι:

$$3f(3)+4f(4)+5f(5)=12f(x_0)-12x_0+50$$

Μονάδες 7

ΣΠΟΥΔΗ