ΣΠΟΥΔΗ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

e-spoudi

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

21-10-2023

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 4

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f και D_f το πεδίο ορισμού της. Από τα παρακάτω όρια

1. $\lim\limits_{x\to 1} f(x),\ D_f=[0,1)$ **2.** $\lim\limits_{x\to 2} f(x),\ D_f=[0,1]\cup[3,4]$

3. $\lim\limits_{x\to 0} f(x),\ D_f=(-1,0)\cup(0,1)$ **4.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\ D_f=(1,+\infty)$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\ D_f=(-3,0]$ **6.** $\lim\limits_{x\to 3} f(x),\ D_f=\mathbb{R}-\{3\}$

να επιλέξετε εκείνα που είναι καλώς ορισμένα και εκείνα που δεν είναι καλώς ορισμένα. Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 6

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

<< Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε το σύνολο τιμών τής $-f$ είναι το διάστημα $[-f(\alpha),-f(\beta)]$ >>

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α αν είναι αληθής ή το γράμμα Ψ αν είναι ψευδής.

Μονάδες 3

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

Α5. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων Ο.

β) Αν $f(x)=\ln x$, τότε είναι $f'\left(e^{-2}\right)=e^2$

γ) Για την $1-1$ συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $f(A)$ ισχύει $f^{-1}(f(x))=f\left(f^{-1}(x)\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}\cap f(A)$

δ) Ισχύει $\frac{\eta\mu x}{x}<-1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι συναρτήσεις f, g με τύπους:

$$f(x) = e^{x-1} + x - 2 \text{ και } g(x) = \ln x + 1$$

Β1. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $h = fog$ και $z = \frac{f}{g}$

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και κατόπιν να μελετήσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ως προς τη μονοτονία. Ποια είναι η σχετική θέση της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x′x ;

Μονάδες 6

Β3. Ορίζουμε τη συνάρτηση φ με τύπο:

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - e^{x-1} + \lambda x^2 - 1}{|x-1|},\ x \neq 1$$

Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim\limits_{x \to 1} \varphi(x)$

Μονάδες 5

Β4. Να λύσετε στο διάστημα $(0, +\infty)$ την εξίσωση:

$$\ln x + \ln \frac{x}{x+1} = -x^2 + x + 1$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ και $f(0) = 1$
- $|f(x) + x - 1| \leq e^{-\frac{1}{x^2}} + \eta\mu^2 x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$
- $g(x) = \begin{cases} \alpha^2 f(x) + \frac{\eta\mu 2x}{x}, & x > 0 \\ 2\alpha f(x) + \ln(1-x) + 1, & x \leq 0 \end{cases}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

ΣΠΟΥΔΗ

$$\frac{f\left(x^2-2x\right)}{x-2}+\frac{e^x+1}{x}=1$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,2)$

Μονάδες 6

Γ3. Αν η g είναι συνεχής, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha=1$

Μονάδες 6

Γ4. Αν $\alpha=1$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[1,4]$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$2f(2)+3f(3)=5f(\xi)-5\xi+13$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- Το σύνολο τιμών τής f είναι $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$
- $f^3(x)+f(x)=5x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

και η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=x^{f(x)}$, $x>0$

Δ1. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to2} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ **δ)** $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)+2}{h+2}$

και κατόπιν να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$\lim_{h\to0}\frac{f\left(2+3h\right)-f\left(2\right)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f\left(2-2h\right)-f\left(2\right)}{h}$$

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Κατόπιν αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει το πολύ μια ρίζα.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο $x_0=2$

Μονάδες 6

ΣΠΟΥΔΗ

Δ4. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x+1}{x^2 f(x)+\eta\mu x+2}$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x)\left(\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}+\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{f(x)}-1\right)\right]$

Μονάδες 7

ΣΠΟΥΔΗ